

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И
МЕХАНИКИ им. акад. В.И. СМЕРНОВА

С.М. Ермаков

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Часть I

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Санкт-Петербург
2006

Рецензенты:

проф. В.Б. Невзоров (С.-Петербургский гос. ун-т),
проф. Ю.А. Сушков (С.-Петербургский гос. ун-т).

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 01.02.00 "Прикладная математика и информатика", а также специальностей 35.14.00 "Прикладная информатика в гуманитарной сфере", 35.15.00 "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем".

Изложение базируется на материале глав II и VII монографии автора "Метод Монте-Карло и смежные вопросы" (М., Наука, 1975). Материал существенно дополнен новыми результатами и адаптирован в качестве учебного пособия.

© С.М. Ермаков, 2006

Оглавление

Глава 1. Моделирование равномерно распределенных случайных величин	
1.1 Случайные числа (сведения из теории вероятностей) . . .	5
1.2 Равномерно распределенные последовательности вещественных чисел	11
1.3 Псевдослучайные числа	22
Глава 2. Моделирование случайных величин и процессов	
2.1 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения	33
2.2 Моделирование случайных процессов. Интегралы по траекториям	50
Литература	62

Глава 1. Моделирование равномерно распределенных случайных величин

Моделирование случайности с помощью компьютера имеет громадную сферу приложений. Почти каждая игра, которую мы сегодня проигрываем с помощью компьютера, использует элемент случайности. С помощью так называемого датчика случайных чисел сегодня имитируется движение молекул в сложных средах, изучаются производственные процессы, экономическая и финансовая ситуация и многое другое. Метод Монте-Карло — это метод, использующий случайные числа для решения разнообразных задач. Случайные числа можно получать с помощью рулетки, что собственно и делают постоянно в игорных заведениях Монте-Карло. Так возникло название, а развитие метод получил в первую очередь в связи с расчетами атомной бомбы и ядерных реакторов. Влияние проблем из этой области до сих пор весьма ощутимо в научных исследованиях, посвященных методу Монте-Карло.

На русском языке имеется обширная монографическая и учебная литература, где, в частности, освещена предыстория метода. Мы не будем далее останавливаться на этих вопросах. Данное руководство имеет своей целью рассмотреть математические аспекты имитации случайности и провести параллели между классическими численными методами и численными методами, использующими случайные числа.

Наша цель будет состоять в обосновании алгоритмов метода Монте-Карло и определении класса задач, где его применение целесообразно.

Книга состоит из двух частей. Первая включает ряд переработанных для учебных целей разделов 2-го издания книги "Метод Монте-Карло и смежные вопросы"¹.

Вторая часть содержит новый материал, посвященный дискретным задачам — решению систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. На этих сравнительно простых задачах удобно проследить связи детерминированных и рандомизованных методов.

Первая часть читалась студентам специальности "Прикладная математика" в курсе "Методы математического моделирования". Вторая составила предмет специального курса, для студентов кафедры статистического моделирования СПбГУ.

¹Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., Наука, 1975.

1.1 Случайные числа (сведения из теории вероятностей)

Мы напомним некоторые простейшие сведения из теории вероятностей, относящиеся, в основном, к равномерно распределенным случайным величинам, излагая их в удобной для дальнейшего форме.

Простейшие случайные величины или случайные числа. Простейшими мы будем считать дискретные или непрерывные равномерно распределенные случайные величины, т.е. величину β такую, что она принимает одно из r значений $0, 1, \dots, r - 1$ с равными вероятностями

$$P\{\beta = k; k = 0, \dots, r - 1\} = 1/r \quad (1.1.1)$$

и величину α равномерно распределенную на промежутке $[0, 1]$, т.е. такую, что она может принимать любое вещественное значение из $[0, 1]$ и вероятность того, что она примет значение из некоторого интервала Δ , $\Delta \in [0, 1]$ равна длине $|\Delta|$ этого интервала. Плотность $\phi(x)$ на $[0, 1]$ случайной величины α выражается равенством

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Особый интерес представляет в дискретном случае $r = 2$. В этом случае β называют случайным битом.

Независимые реализации случайной величины β называют также (в особенности при $r = 10$) случайными цифрами, а числа, составленные из этих случайных цифр — случайными числами.

Некоторые элементарные факты, относящиеся к случайным числам, будут важны в дальнейшем изложении. Мы сформулируем их в виде свойств.

Случайные величины α и β связаны между собой. Имеет место следующее утверждение.

Свойство 1. Если $O_r \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots$ бесконечная r -ичная дробь² и β_i независимые в совокупности случайные величины с распределением (1.1.1), то случайная величина

$$\alpha = O_r \beta_1, \dots, \beta_n \dots$$

равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$. Обратно, если α равномерно распределена на $[0, 1]$ и $O_r \beta_1, \dots, \beta_n \dots$ ее представление в

²т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k / r^k$ — здесь r играет роль запятой в десятичном представлении ($0, \quad = 0_{10}$)

виде r -ичной дроби, то $\beta_1, \dots, \beta_n \dots$ независимы в совокупности и имеют распределение (1.1.1).

Отметим, что аналогичные утверждения могут быть доказаны для представления дроби в смешанной системе счисления.

Дальнейшее будет касаться случайных векторов, компоненты которых независимы и равномерно распределены.

Свойство 2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ последовательность равномерно распределенных независимых реализаций случайной величины α (с плотностью (1.1.2), тогда случайные векторы $\Xi_i = (\alpha_{(i-1)s+1}, \dots, \alpha_{is}), i = 1, 2, \dots$ независимы и равномерно распределены в единичном s -мерном гиперкубе $D_s = [0, 1]^s$.

Свойство 2а. При тех же условиях случайные векторы

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i+s-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.1.3)$$

равномерно распределены в единичном s -мерном гиперкубе.

Свойство 3. Если мы произвольным (но не зависящим от значений $\alpha_1, \alpha_2 \dots$) образом изменим порядок нумерации элементов последовательности $\|\alpha_i\|_1^\infty$, то свойство 2 также будет иметь место.³

Далее мы сформулируем утверждения, являющиеся частным случаем закона больших чисел и центральной предельной теоремы соответственно, рассматривая их как свойства равномерно распределенных случайных величин. Пусть Ξ_i векторы с равномерно распределенными и независимыми компонентами (фигурирующими в свойствах 2 и 3).

Тогда имеет место

Свойство 4. Если $f(X), X = (x_1, \dots, x_s)$ любая интегрируемая (по Лебегу) в единичном гиперкубе $D_s = [0, 1]^s$ функция, то с вероятностью 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\Xi_i) = \int_{D_s} f(X) dX \quad (1.1.4)$$

для любого $s = 1, 2, \dots$

(Частный случай усиленного закона больших чисел).

Свойство 5. Для любой интегрируемой с квадратом в D_s функции

³Строго говоря, речь идет об изменении нумерации в любом конечном подмножестве элементов последовательности $\alpha_1, \alpha_2 \dots$

$f(X)$ при любом натуральном s имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_f} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\Xi_i) - \int_{\mathcal{D}_s} f(X) dX \right| < y \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du,$$

где

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathcal{D}_s} f^2(X) dX - \left(\int_{\mathcal{D}_s} f(X) dX \right)^2. \quad (1.1.5)$$

(Частный случай центральной предельной теоремы).

Два последних свойства указывают на возможность практического использования случайных чисел (если мы умеем их получать) в вычислительной математике. Действительно, интеграл

$$J = \int_{\mathcal{D}_s} f(X) dX$$

при N достаточно большом может быть приближен (с вероятностью 1) средним $S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\Xi_i)$. Если же конечен интеграл $\int_{\mathcal{D}_s} f^2(X) dX$, то с вероятностью p и также достаточно большом N выполняется неравенство

$$|J - S_n(f)| \leq \frac{\gamma_p \sigma_f}{\sqrt{N}}, \quad (1.1.6)$$

где γ_p определяется равенством

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\gamma_p} e^{-u^2/2} du = p.$$

В действительности, располагая случайными числами, мы можем использовать предельные законы теории вероятностей в гораздо более общей форме. Так, например, мы можем получить предельное распределение среднего $S_N(f)$, когда существует интеграл

$$\int_{\mathcal{D}_s} |f(X)|^r dX, \quad 1 < r < 2,$$

и оценить погрешность $|J - S_N[f]|$. Она убывает в этом случае медленнее чем $O(N^{-1/2})$. Мы также можем рассмотреть задачу о вычислении

вероятностным способом интеграла по вероятностной мере μ . Этот вопрос будет обсуждаться в следующих главах.

Но вернемся к вопросу о случайных числах. Их можно пытаться получить подбрасывая монету, (если она идеальна в том смысле, что мы получаем орла(1) или решку (0) с равными вероятностями) или с помощью рулетки, также идеальной (отсюда, собственно, произошло название метод Монте-Карло).

Один из подходов, позволяющих использовать некую последовательность чисел (r -ичных цифр) в приложениях является применение аппарата статистических тестов (проверки гипотез).

Имея заданную последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, мы можем высказывать гипотезы о том, что они случайны, независимы и имеют заданное распределение. Аппарат проверки статистических гипотез позволяет проверить — не противоречат ли наши предположения наблюдаемым значениям чисел. Если такое противоречие имеет место со значительной вероятностью, то соответствующая гипотеза отвергается.

Удовлетворение данной последовательности тестам является необходимым условием для их использования в приложениях.

В качестве примеров критериев согласия для проверки статистических гипотез приведем критерии χ^2 и Колмогорова.

Пусть нами высказана гипотеза H_0 : случайная величина α имеет равномерное распределение на промежутке $[0,1]$. Критерий χ^2 строится следующим образом. Выбирается m взаимно исключающих событий A_1, \dots, A_m так, что появление каждой реализации α_i случайной величины α означает наступление одного из них. Подсчитывается число n_k наступления k -го события, $\sum_{k=1}^m n_k = N$. Если $P(A_k)$ вероятность события, вычисленная в предположении, что H_0 верна, то вычисляем число (значение критерия χ^2)

$$\chi_{m-1}^2 = \sum_{k=1}^m C_k \left(\frac{n_k}{N} - P(A_k) \right)^2, \quad C_k > 0. \quad (1.1.7)$$

В нашем случае отрезок $[0,1]$ разбивается на непересекающиеся отрезки Δ_k и для каждого Δ_k подсчитывается число событий $A_k : \alpha_i \in \Delta_k, i = 1, \dots, N$. Теоретическая вероятность события A_k есть длина отрезка $\Delta_k, P(A_k) = |\Delta_k|$. Обычно выбирают $|\Delta| = 1/m$.

Критерий (1.1.7) можно также вычислить для последовательности цифр β_i (в r -ичной системе счисления). В предположении, что каждая

цифра равновероятна обычно полагают $A_k = \{\beta_i = k\}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, $P(A_k) = 1/2$, и $m = r$.

Справедлива

Теорема 1.1. При выборе констант $C_k = N/p(A_k)$ величина χ_{m-1}^2 имеет при $N \rightarrow \infty$ распределение χ^2 с $m - 1$ степенью свободы.

Для распределения χ_m^2 имеются подробные таблицы.

Важно отметить, что существует бесчисленное количество возможностей выбора событий A_k в предположении справедливости H_0 . Можно проверять события, состоящие в том, что появление всевозможных пар β_{2j-1}, β_{2j} равновероятно. То же относительно троек и т.д. Аналогично мы можем проверить равномерность распределения пар, троек и др. в непрерывном случае. При этом легко видеть, что равновероятность появления каждого из значений $\beta_k = k$ в ряду β_1, \dots, β_N не гарантирует равновероятность появления всевозможных пар. (Сравните свойство 2 равномерно распределенных случайных величин).

Критерий Колмогорова. Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ случайные точки на \mathbf{R}^1 , то функцию

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{(-\infty, x]}(\alpha_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}(x_k \leq x), \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.1.8)$$

где $\chi_{(a, b]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $(a, b]$, называют эмпирической функцией распределения. Критерием Колмогорова называют случайную величину

$$\mathbf{D}_N = \sup_x |\hat{F}_N(X) - F(x)|, \quad (1.1.9)$$

где $F(x)$ — теоретическая функция распределения α . В интересующем нас случае и $F(x) = x$. Известно предельное при $N \rightarrow \infty$ распределение \mathbf{D}_N , которое не зависит от $F(x)$, что дает возможность проверять гипотезу о распределении случайных величин. В нашем случае эта гипотеза о равномерности распределения.

Для случайного вектора в s -мерном гиперкубе можно рассматривать эмпирическую функцию распределения каждой компоненты (в предположении верности гипотезы $H_0 : F(x) = x$ это одна и та же функция распределения для каждой из компонент), а также эмпирические функции их условного распределения соответствующих условным функциям распределения, при $s = 2$

$$F(x, y) = P(\alpha \leq x/\alpha' \leq y). \quad (1.1.10)$$

На их базе могут строиться критерии согласия для проверки гипотезы H_0 .

В литературе неоднократно описывались системы тестов, которые авторы считают достаточными для проверки качества последовательностей чисел, используемых в качестве случайных и равномерно распределенных (например, [1,2]). Не останавливаясь подробнее на этом вопросе, отметим, что проверки с помощью статистических тестов полезны и необходимы, но исходный выбор алгоритма приближенно имитирующего случайность нуждается в непосредственном теоретическом обосновании. Далее мы рассмотрим один из подходов к такого рода обоснованию в рамках теоретико-числовых методов.

Псевдослучайные числа. Как уже отмечалось, многие приложения предполагают, что независимые реализации случайной величины с равномерным распределением используются компьютерными программами.

Удобным методом получения таких реализаций, очевидно, является сравнительно простой алгоритм. Однако, здесь мы имеем дело с явным противоречием — детерминированный алгоритм, строго говоря, не может быть источником случайных чисел. Можно предположить, что алгоритм, вычисляющий числа "похожие" на случайные, должен быть очень сложным. Действительно, исследования Н.А. Колмогорова и его последователей показали, что алгоритм, дающий числа, которые не могут быть отличимы от случайных (с помощью каких либо тестов) должен иметь бесконечную сложность (см., например, [3]). По этой причине следует ставить задачу о конструкции алгоритма, вычисляющего числа, обладающие лишь некоторыми свойствами случайных чисел или обладающие этими свойствами приближенно (в некотором строго определенном смысле).

Определение 1.1. Назовем последовательность чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N \dots$ псевдослучайной, если эти числа вычисляются с помощью детерминированного алгоритма (программы) и приближенно обладают свойствами 1 — 5 случайных чисел.

Решение проблемы построения такого алгоритма, называемого датчиком случайных чисел лежит вне рамок теории вероятностей. Здесь необходимо привлечение средств теории чисел. Ниже излагаются некоторые нужные нам факты из теории равномерно распределенных в теоретико-числовом смысле последовательностей.

1.2 Равномерно распределенные последовательности вещественных чисел

Необходимо четко уяснить себе, что существует принципиальная разница между теоретико-вероятностным и теоретико-числовым подходом. В рамках теории чисел мы забываем временно о случайности. Мы имеем дело с последовательностями (может быть бесконечными) целых или вещественных чисел.

Пусть $\mathcal{E} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \dots$ последовательность вещественных чисел из промежутка $[0, 1)$. В рамках теории чисел можно рассматривать аналоги свойств 1–5, сформулированных ранее для последовательности независимых реализаций равномерно распределенной случайной величины.

Так, например, для интегрируемой на $[0, 1)$ функции $f(x)$ мы можем рассматривать предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\varepsilon_k). \quad (1.2.1)$$

Если для любой интегрируемой f этот предел будет равен интегралу $\int_0^1 f(x) dx$, то мы вправе говорить об аналоге закона больших чисел (свойство 4). Однако среди всех интегрируемых (по Лебегу) функций можно указать такие, что они просто не определены в точках $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ последовательности \mathcal{E} , множество которых имеет нулевую меру. Для этих функций равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\varepsilon_k) = \int_0^1 f(x) dx \quad (1.2.2)$$

не обязано выполняться.

Известно, однако, что существуют последовательности такие, что для любой интегрируемой по Риману функции f равенство (1.2.2) выполняется.

Определение 1.2. Последовательность $(\varepsilon_i)_1^\infty$ вещественных чисел из отрезка $[0, 1)$ называется равномерно распределенной (в теоретико-числовом смысле) на этом отрезке, если для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$ имеет место равенство (1.2.2).

Поскольку ступенчатые функции и тригонометрические функции (теорема Вейерштрасса) всюду плотны в множестве интегрируемых

по Риману функций, то определение 1 равносильно следующим (соответствующие доказательства имеются в доступной литературе).

Определение 1.2а. Последовательность $(\varepsilon_i)_1^\infty$ называется равномерно распределенной, если для каждого подынтервала $\Delta \subset [0, 1)$ выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_\Delta(\varepsilon_i) = |\Delta|, \quad (1.2.3)$$

где

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta \\ 0, & x \notin \Delta. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Определение 1.2б. (Критерий Вейля). Последовательность $(\varepsilon_i)_1^\infty$ равномерно распределена, если для каждого целого, отличного от нуля k выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{2\pi i k \varepsilon_l} = 0. \quad (1.2.5)$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2. *Определения 1.2, 1.2а и 1.2б равносильны.*

Из этой теоремы (определение 1.1б) следует

Теорема 1.3. *Равномерно распределенные последовательности существуют.*

В качестве доказательства мы укажем конкретный пример такой последовательности (также следуя Вейлю).

Пусть

$$\varepsilon_n = \{n\beta\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

где β — иррациональное число, а $\{a\}$ обозначает дробную долю числа a . Последовательность ε_n равномерно распределена. Действительно, проверим выполнение (1.2.5)

$$S_N(\mathcal{E}) = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \{n\beta\}} = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \beta} = e^{2\pi i k \beta} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i k N \beta}}{1 - e^{2\pi i k \beta}}$$

и

$$|S_N(\mathcal{E})| \leq |e^{2\pi i k \beta}| \frac{1 + |e^{2\pi i k N \beta}|}{1 - e^{2\pi i k \beta}},$$

что после элементарных выкладок дает

$$|S_N(\mathcal{E})| \leq \frac{1}{|\sin \pi k \beta|}.$$

Предположение об иррациональности β обеспечивало во всех случаях отличие от нуля знаменателя в правой части неравенств.

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{N}|S_N(\mathcal{E})| \leq \frac{1}{N|\sin \pi k\beta|}$$

и при любом целом $k \neq 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1}|S_n(\mathcal{E})| = 0,$$

что и доказывает равномерную распределенность последовательности \mathcal{E} . В действительности, равномерная распределенность довольно слабое свойство и равномерно распределенных последовательностей "очень много". Мы приведем далее так называемую метрическую теорему, см. [4], относящуюся к почти всем значениям величины x из $[0, 1]$.

Теорема 1.4. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ последовательность различных целых чисел, тогда последовательность

$$\varepsilon_n = \{a_n x\} \tag{1.2.7}$$

равномерно распределена для почти всех x из промежутка $[0, 1]$.

Доказательство. Зафиксируем целое $k \neq 0$ и положим

$$S(N, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i k a_n x), \quad N \geq 1, \quad x \in [0, 1].$$

Умножая $S(N, x)$ на $\overline{S(N, x)}$ — величину комплексно сопряженную к ней, имеем

$$S(N, x) \overline{S(N, x)} = |S(N, x)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m, n=1}^N \exp(2\pi i k (a_m - a_n) x).$$

Интегрируя полученное выражение по x от 0 до 1 и замечая, что отличными от нуля (равными единице) будут лишь слагаемые при $m = n$, получим

$$\int_0^1 |S(N, x)|^2 dx = 1/N.$$

Следовательно,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2, x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

По лемме *Фату* получим

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |S(N^2, x)|^2 dx < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд под знаком интеграла должен сходиться для почти всех x и его общий член для почти всех x должен стремиться к нулю

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N^2, x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Для целого положительного N можно указать такое целое положительное m , что $m^2 \leq N < (m+1)^2$. Оценивая грубо $|S(N, x)|$, получим

$$\begin{aligned} |S(N, x)| &\leq |S(m^2, x)| + \frac{1}{N} \left| \sum_{n=m^2+1}^N e^{2\pi i k a_n x} \right| \leq |S(m^2, x)| + \\ &+ \frac{2m}{N} \leq |S(m^2, k)| + \frac{2}{\sqrt{N}}, \quad \text{поскольку } N \leq m^2 + 2m. \end{aligned}$$

Отсюда $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, x) = 0$, для почти всех x из $[0, 1]$.

Исключительное множество зависит от k , но сумма счетного множества множеств нулевой меры имеет меру 0. Это и завершает доказательство теоремы.

Аналогично одномерному случаю вводится понятие равномерно распределенной последовательности векторов.

Определение 1.3. Последовательность s -мерных векторов

$$\mathbf{e}_i = \|(e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(s)})\|_{i=1}^{\infty} \quad (0 \leq e_i^{(j)} \leq 1), \quad j = 1, \dots, s$$

называется равномерно распределенной в $D_s = [0, 1]^s$ единичном s -мерном гиперкубе, если для любой интегрируемой по Риману в D_s функции $f(X)$, $X = (x_1, \dots, x_s)$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{e}_n) = \int_{D_s} f(X) dX. \quad (1.2.8)$$

Имеет место многомерный аналог критерия Вейля.

Теорема 1.4а. Для того, чтобы последовательность \mathbf{e}_i была равномерно распределена в D_s необходимо и достаточно, чтобы для

любого набора s целых чисел k_1, \dots, k_s , не равных одновременно нулю выполнялось равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i(k_1 e_n^{(1)} + \dots + k_s e_n^{(s)})} = 0. \quad (1.2.9)$$

Если обозначить Δ_s любой s -мерный прямоугольный параллелепипед, лежащий в D_s , то будет иметь место очевидный аналог теоремы 1.2.

Если β_1, \dots, β_s — некоторые независимые, т.е. такие, что ни при каких целых k_1, \dots, k_s , не равных одновременно нулю, линейная комбинация $k_1\beta_1, \dots, k_s\beta_s$ не является рациональным числом, иррациональные числа, то легко видеть, что для последовательности векторов

$$\mathbf{e}_n = (\{n\beta_1\}, \{n\beta_2\}, \dots, \{n\beta_s\})$$

выполнен критерий Вейля (1.2.9), т.е. она равномерно распределена в D_s .

Продолжая аналогию между равномерно распределенными случайными величинами и равномерно распределенными последовательностями, замечаем, что желательным для нас является выполнение аналогов свойств 2 и 3. В теории чисел фигурирует аналог свойства 2.

Определение 1.4. Последовательность $\|\varepsilon_i\|$ называется s -равномерно распределенной, если последовательность векторов $(e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+s-1})$, $i = 1, 2, \dots$ равномерно распределена в D_s .

Непосредственно с помощью критерия Вейля легко установить следующее:

Если последовательность $\|\varepsilon_i\|$ s -равномерно распределена и $r \leq s$, то она и r -равномерно распределена. Обратное, вообще говоря, не верно.

О дальнейших свойствах s -равномерно распределенных в смысле этого определения последовательностей см. [4, 5]. Мы дадим другое определение s -равномерно распределенных последовательностей.

Пусть $\varepsilon = \|\varepsilon_i\|_1^\infty$ — последовательность вещественных чисел из $[0, 1]$. Образуем векторы

$$\mathbf{e}_k^{(s)} = (\varepsilon_{(k-1)s+1}, \dots, \varepsilon_{ks}), \quad k = 1, 2, \dots \text{ размерности } s.$$

Определение 1.5. Назовем последовательность $\|\varepsilon_i\|$ — s -независимо равномерно (s -н-равномерно) распределенной, если векторы $\mathbf{e}_k^{(s)}$ равномерно распределены в D_s .

Такое определение менее удобно для исследований в области теории чисел, но более естественно в теории метода Монте-Карло.

Неизвестно, справедливо ли для любых последовательностей s -н-равномерно распределенных, утверждение, что они также являются $s-1$ -н-равномерно распределенными. (Это утверждение очевидно лишь для $s = 2$).

Но следующая теорема имеет место.

Теорема 1.5. *Из s -н-равномерной распределенности последовательности не следует, вообще говоря, ее $s + 1$ -н-равномерная распределенность.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть простой пример

Пусть $s = 1$ и $\varepsilon_k = \{k\beta\}$, где β иррационально. Не умаляя общности, считаем, что $\beta < 1$. Построим последовательность $\mathbf{e}_l^{(2)}$

$$\mathbf{e}_l^{(2)} = \left(\{(2l-1)\beta\}, \{2l\beta\} \right), \quad l = 1, 2, \dots \quad (1.2.10)$$

Покажем, что векторы $\mathbf{e}_l^{(2)}$ не распределены равномерно в квадрате. Действительно, в случае их равномерной распределенности, должно, в частности, выполняться равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \chi_{\Delta}(\mathbf{e}_l^{(2)}) = \int_{\Delta} dx dy = 1/2, \quad (1.2.11)$$

где $\Delta = \{x, y : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, а χ_{Δ} — характеристическая функция этого треугольника. Равенство (1.2.11) означает так же, что неравенство

$$\{(2l-1)\beta\} \leq \{2l\beta\} \quad (1.2.12)$$

должно выполняться в пределе для половины членов последовательности ε_k . Это неравенство является условием нахождения точки $\mathbf{e}_l^{(2)}$ в треугольнике. Но

$$\{2l\beta\} = \{(\{(2l-1)\beta\} + \beta)\},$$

а

$$\{(\{(2l-1)\beta\} + \beta)\} = \begin{cases} (2l-1)\beta + \beta, & \text{если } \{(2l-1)\beta\} + \beta < 1 \\ (2l-1)\beta + \beta - 1, & \text{если } \{(2l-1)\beta\} + \beta > 1. \end{cases}$$

Но второй случай не может быть реализован, так как из (1.2.12) имеем

$$\{(2l-1)\beta\} \leq \{2l\beta\} = \{(2l-1)\beta\} + \beta - 1 \quad \text{т. е.} \quad \beta - 1 > 0 \quad \text{и} \quad \beta > 1,$$

что противоречит предположению. Таким образом, неравенство (1.2.12) имеет место только, если $\{(2l - 1)\beta\} < 1 - \beta$. В силу равномерной распределенности ⁴ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \chi_{\Delta}(\mathbf{e}_l^{(2)}) = (1 - \beta) \neq 1/2,$$

(β — иррационально).

Отсюда и следует наше утверждение.

В теории чисел показано, что s -равномерно распределенные последовательности $\rho_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots$ (в смысле определения 1.4) могут быть получены с помощью формулы

$$\rho_k^{(s)} = \{(k^s + P_{s-1}(k)\beta\},$$

где P_{s-1} — многочлен степени $s - 1$ с целыми коэффициентами (Франклин [6]).

Последовательности s -равномерно распределенные при любом s носят название вполне равномерно распределенных. Очевидно свойство вполне равномерной распределенности является важным. Им обладает (с вероятностью 1) последовательность реализаций равномерно распределенных случайных величин. Можно ожидать что, заменив в выражении для $\rho_k^{(1)}$ многочлен на экспоненту, мы получим последовательность со свойствами близкими к свойствам вполне равномерной распределенности. Обсудим далее некоторые свойства такого рода последовательностей.

Некоторые свойства дробных долей показательной функции. Далее мы рассматриваем последовательность вещественных чисел вида

$$\varepsilon_k = \{M^k \varepsilon_0\} \quad \text{или} \quad \varepsilon_k = \{M \varepsilon_{k-1}\}. \quad (1.2.13)$$

Для дальнейшего нам понадобится теорема (Сю [7], Соболев [8], Ермаков [9]), которую мы приведем в более простой форме, чем это сделано в [9].

Теорема 1.6. Пусть $f(X)$ — функция, определенная и интегрируемая по Риману в единичном s -мерном гиперкубе D_s .

Положим

$$\phi_M(x) = f(x, \{M_1 x\}, \dots, \{M_1 \dots M_{s-1} x\}),$$

⁴С помощью критерия Вейля легко проверить, что последовательности $\{2l\beta\}$ и $\{(2l - 1)\beta\}$ равномерно распределены на отрезке $(0, 1)$, если β иррационально.

где M_1, \dots, M_{s-1} — натуральные числа больше единицы и $M = \min(M_1, \dots, M_s)$. Справедливо равенство

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_M(x) dx = \int_{D_s} f(X) dX. \quad (1.2.14)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $(0, 1)$ на M_1 равных интервалов, положим $M_1 x = j_1 + y_1$ на интервале с номером j_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_M(x) dx &= \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \int_{j_1/M_1}^{(j_1+1)/M_1} \phi_M(x) dx = \\ &= \frac{1}{M_1} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \int_0^1 f\left(\frac{j_1 + y_1}{M_1}, y_1, \dots, \{M_2 \dots M_{s-1} y_1\}\right) dy_1. \end{aligned}$$

Аналогично, разбивая каждый из полученных интегралов на сумму M_2 слагаемых, и в каждом из них делая замену переменных $M_2 y_1 = j_2 + y_2$, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \phi_M(x) dx = \\ &= \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \int_0^1 f\left(\frac{j_1 + y_1}{M_1}, \frac{j_2 + y_2}{M_2}, y_2, \dots, \{M_3 \dots M_{s-1} y_2\}\right) dy_2. \end{aligned}$$

И после повторения этого процесса s раз (в последний раз отрезок разбиваем на M частей) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_M(x) dx &= \frac{1}{M M_1 \dots M_{s-1}} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \dots \\ &\dots \sum_{j_s=0}^{M-1} \int_0^1 f\left(\frac{j_1 + y_1}{M_1}, \dots, \frac{j_{s-1} + y_{s-1}}{M_{s-1}}, \frac{j_s + y_s}{M}\right) dy_s. \end{aligned}$$

Обозначим J_M правую часть последнего равенства, а $\bar{m}(j_1, \dots, j_s)$ и $\underline{m}(j_1, \dots, j_s)$ верхнюю и нижнюю соответственно грани функции $f(X)$ в параллелепипеде

$$j_k/M_k \leq x_k \leq (j_k + 1)/M_k, \quad (k = 1, \dots, s, M_s = M),$$

тогда, очевидным образом, получим

$$\frac{1}{M_1, \dots, M_{s-1} M} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \dots$$

$$\dots \sum_{j_s=0}^{M_s-1} \underline{m}(j_1, \dots, j_s) < J_M \leq \frac{1}{M_1, \dots, M_{s-1} M_s} \sum_{j_1=0}^{M_1} \dots \sum_{j_s=0}^{M_s} \bar{m}(j_1, \dots, j_s).$$

В правой и левой части полученного неравенства находятся верхняя $\bar{S}(f, M)$ и нижняя $\underline{S}(f, M)$ суммы Дарбу, которые в силу предположенной интегрируемости по Риману функции f имеют при $M \rightarrow \infty$ своим общим пределом $\int_{D_s} f(X) dX$, т.е.

$$\int_0^1 \phi_M(x) dx \text{ при } M \rightarrow \infty \text{ есть } \int_{D_s} f(X) dX.$$

Замечание. Результат теоремы тривиальным образом не зависит от порядка нумерации независимых переменных.

Теперь мы можем убедиться в том, что для последовательности дробных долей показательной функции асимптотически при $M \rightarrow \infty$ выполняются многие свойства последовательности независимых реализаций случайной величины равномерно распределенной на промежутке $(0, 1)$.

Теорема 1.7. Пусть $f(X)$ произвольная интегрируемая по Риману в D_s функция, $\alpha_l = \{M^{l-1}\beta\}$, $\beta \in [0, 1]$ и $X_k = (\alpha_{(k-1)s+1}, \dots, \alpha_{ks})$.

Тогда для почти всех β из $(0, 1)$ справедливо равенство

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) \right) = \int_{D_s} f(X) dX. \quad (1.2.15)$$

Действительно, пусть M фиксировано. Имеем

$$f(X_k) = f\left(\{M^{(k-1)s+1}\beta\}, \dots, \{M^{ks}\beta\}\right) = \phi_M(\{M^{(k-1)s}\beta\}).$$

Из теоремы 1.4 следует, что для почти всех β из $[0, 1)$ последовательность $Y_k = \{M^{(k-1)s}\beta\}$ распределена равномерно и мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) = \int_0^1 \phi_M(x). \quad (1.2.16)$$

Применяя к последнему равенству теорему Сю получаем требуемое.

В теореме 1.7 векторы X_k были образованы из элементов последовательности $\alpha_1, \dots, \alpha_t$, $\alpha_t = \{M^t x\}$, взятых в определенном фиксированном порядке. Пусть теперь l_1^k, \dots, l_s^k некоторые различные неотрицательные целые числа. Рассмотрим векторы $Y_k = (\alpha_{l_1^k}, \dots, \alpha_{l_s^k})$, $k = 1, 2, \dots, N$. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.7'. *Для последовательности векторов Y_k асимптотически по M выполняется критерий Вейля для почти всех x из $[0, 1]$.*

Доказательство. Во многом аналогично доказательству теоремы 1.4.

Зафиксируем набор целых не равных одновременно нулю чисел k_1, \dots, k_s и составим сумму

$$S(N, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp [2\pi i (k_1 \alpha_{l_1^n} + k_2 \alpha_{l_2^n} + \dots + k_s \alpha_{l_s^n})].$$

Умножая $S(N, x)$ на сопряженную к ней, имеем

$$|S(N, x)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m, n=1}^N \exp [2\pi i (k_1 (M^{l_1^m} - M^{l_1^n}) + \dots + k_s (M^{l_s^m} - M^{l_s^n})) x].$$

Выделяя члены суммы, соответствующие $m = n$, получим

$$|S(N, x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m \neq n \\ m, n=1}}^N \exp [2\pi i x (k_1 (M^{l_1^m} - M^{l_1^n}) + \dots + k_s (M^{l_s^m} - M^{l_s^n}))].$$

Далее проинтегрируем полученное выражение по x и перейдем к пределу при $M \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 |S(N, x)|^2 dx = \\ & = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m \neq n \\ m, n=1}}^N \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 [2\pi i x (k_1 (M^{l_1^m} - M^{l_1^n}) + \dots + k_s (M^{l_s^m} - M^{l_s^n}))]. \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

Заметим теперь, что в каждом слагаемом суммы правой части (1.2.17) подынтегральное выражение есть некая $\varphi_M(x)$ (см теорему Сю) для функции $2s$ переменных $\exp [2\pi i (k_1 (x_1 - y_1) + \dots + k_s (x_s - y_s))]$ и мы

имеем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 |S(N, x)|^2 dx = \frac{1}{N} + \frac{N(N-1)}{N^2} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_s \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_s \times \exp [2\pi i(k_1(x_1 - y_1) + \dots + k_s(k_s - y_s))].$$

Откуда и следует, в силу равенства нулю многократного интеграла, равенство

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 |S(N, x)|^2 dx = \frac{1}{N}.$$

Далее, буквально воспроизводя рассуждения на стр. 8, имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 |S(N, x)|^2 = 0 \quad \text{для почти всех } x \text{ из } (0, 1).$$

Это и обозначает асимптотическое по M выполнение критерия Вейля для s -мерных векторов $Y = (\alpha_{l_1}^n, \dots, \alpha_{l_s}^n)$.

Замечание. Легко понять, что из асимптотического (по M) выполнения критерия Вейля не следует асимптотическая н. вполне равномерная распределенность последовательности. Более точно равенство (1.2.15), если в нем X_k заменить на Y_k , но оно может не выполняться для некоторых интегрируемых по Риману функций f . Это будет иметь место, если сходимость к пределу при $M \rightarrow \infty$ в равенстве (1.2.17) будет достаточно медленной.

В рамках нашей теории мы можем лишь гарантировать, что равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(Y_k) = \int_{D_s} f(X) dX$$

будет иметь место для всех функций f из некоторого класса \mathcal{F} функций, если этот класс уже, чем класс интегрируемых по Риману функций.

Это может быть класс функций с достаточно быстро убывающими коэффициентами Фурье. В частности это могут быть все конечные тригонометрические суммы.

Далее приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.8. *Для каждой интегрируемой в D_s функции $f(X)$ имеет место равенство*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mes} \left\{ \beta : \Delta \frac{\sqrt{N}}{\sigma_f} R_N[f, \beta] < y \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du,$$

где

$$R_N[f, \beta] = \int_{D_s} f(X) dX - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k), \quad (1.2.18)$$

а

$$\sigma_f^2 = \int_{D_s} f^2(X) dX - \left(\int_{D_s} f(X) dX \right)^2.$$

Доказательство следует из того, что при $N \rightarrow \infty$ и больших M величины $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right)^l$ близки к $\mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\Xi_k) \right)^l$, где Ξ_k — s -мерные векторы с независимыми в совокупности и равномерно распределенными на $[0, 1]$ компонентами. Подробное доказательство с оценками погрешности содержится в [9]. Предельная теорема такого сорта может быть также получена из общих соображений эргодической теории.

Таким образом, дробные доли показательной функции удовлетворяют асимптотически по M многим требованиям, предъявляемым к независимым реализациям случайной величины равномерно распределенной на $[0, 1]$.

1.3 Псевдослучайные числа

Как мы уже говорили, мы будем называть псевдослучайными числа, получаемые с помощью детерминированного алгоритма и приближенно обладающие свойствами независимых реализаций равномерно распределенной случайной величины. Дополнительным и немаловажным условием является (удобная) реализуемость алгоритма с помощью компьютера. Существует несколько так называемых датчиков случайных (точнее, псевдослучайных) чисел-алгоритмов, которые многократно проверялись с помощью статистических тестов и изучались теоретически. Мы не ставим своей целью проводить анализ состояния проблемы и давать обзор обширной литературы в этой области. Для нас важно показать принципиальную возможность приближенной имитации случайности.

Вычисление дробных долей показательной функции могло бы решить нашу задачу, но, как легко убедиться, алгоритм требует вычислений со все возрастающим числом знаков и не реализуем на компьютере. Близким к этому алгоритму по форме является алгоритм, предложенный Лемером [10]. Как мы увидим далее, между упомянутыми алгоритмами

имеется более глубокая связь, чем это принято считать в литературе [5]. Мы подробно остановимся на частном случае датчика, основанного на методе сравнений (иногда в русском переводе "конгруэнтного"). Этот последний называют мультипликативным. Алгоритм имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &\equiv MZ_n \pmod{P} \\ \alpha_{n+1} &= Z_{n+1}/P, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где заданы $M > 1$ целое, $P > 1$ целое и должно быть также задано Z_0 — целое число. Не умаляя общности можно считать, что $M < P$ и $Z_0 < P$. В общем случае (линейный) метод сравнений для получения псевдослучайных чисел использует сравнение

$$Z_{n+1} \equiv a_0 Z_n + a_1 Z_{n-1} + \dots + a_k Z_{n-k} + b \pmod{P}.$$

Заметим, что первое из равенств (1.3.1) (сравнение по модулю P) есть операция, которая может быть просто выполнена на компьютере (точно без округлений), как операция над целыми числами. Что касается второй, то, кроме некоторых специальных случаев, при делении происходит округление.

Специальным случаем при вычислениях в двоичной системе счисления является $P = 2^m$. Здесь алгоритм состоит в том, что мы умножаем два числа Z_n и M , представленные в разрядной сетке с t разрядами. Результат будет представлен с $2t$ разрядами, последние t разрядов, рассматриваемые как двоичная дробь (мантисса двоичного числа с нулевым порядком) и представляет собой α_{n+1} .

Хотя случай $P \neq 2^m$ (в особенности случай простого P) представляет ряд преимуществ (см. Кнут [1]) мы будем в основном рассматривать $P = 2^m$, так как этот случай особенно прост в теоретическом отношении.

Изучим основные свойства датчика (1.3.1).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Для последовательности (1.3.1) целых чисел Z_n для каждого n существует такое натуральное $L' \geq 1$, что $Z_{n+L'} = Z_n$.

Утверждение леммы следует из того, что число различных Z_n конечно (не превосходит P). L' не является единственным числом, обладающим свойством $Z_{n+L'} = Z_n$, $L' \geq 1$. Наименьшее из L' , обладающее этим свойством, называют периодом последовательности (1.3.1).

Очевидно, что для каждого L' справедливо равенство

$$L' = cL, \quad \text{где } c \text{ — натуральное число.}$$

Особый интерес представляет последовательность, имеющая максимальный период.

Исследовать состав последовательности (1.3.1) и свойства ее периодичности позволяют следующие далее леммы. Мы предполагаем, что общий наибольший делитель x_0 и $M - (x_0, M)$ равен 1. x_0 будем считать фиксированным и обозначим (при фиксированном M) $Z(P)$ последовательность (1.3.1) и $L(P)$ длину ее периода.

Лемма 3.2. Пусть P_1 и P_2 целые положительные, $(P_1, P_2) = 1$. Тогда $L(P_1 \cdot P_2) = \text{ОНК}(L(P_1), L(P_2))$, где $\text{ОНК}(m, n)$ означает общее наименьшее кратное натуральных чисел m и n .

Доказательство. Как и ранее $Z_{n+1} = MZ_n \pmod{P}$, $Y_0 = Z_0$ и $Y_{n+1} = MY_n$. Для $i < \min(L(P_1), L(P_2))$ имеем

$$\begin{aligned} Y_{i+jL(P_1)} &= Z_i + C_{i,j}P_1 \\ Y_{i+lL(P_2)} &= Z_i + C_{i,l}P_2, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где $C_{i,j}, C_{i,l}, i, j, l$ — целые положительные числа. Но также

$$Y_{i+L(P_1 \cdot P_2)} = Z_i + C_i P_1 \cdot P_2, \quad C_i \text{ — целое число.} \quad (1.3.3)$$

Из определения перехода последовательности $Z(P_1 P_2)$ следует, что $L(P_1 P_2)$ есть наименьшее целое, при котором выполняется (1.3.2), (1.3.3) т.е. $L(P_1 P_2) = \text{ОНК}(L(P_1), L(P_2))$.

Из доказанной леммы легко получить

Следствие. Если $P = \prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$ есть разложение числа P на простые множители, то

$$L(P) = \text{ОНК}(L(p_1^{n_1}), \dots, L(p_s^{n_s})).$$

Важный для нас случай наличия кратных сомножителей позволяют исследовать следующие две леммы.

Лемма 3.3. Если последовательность $Z(p^m)$ имеет период, длина которого равна $L(p^m)$ (p — простое, m — натуральное число), то длина периода последовательности $Z(p^{m+1})$ либо равна $L(p^m)$, либо в p раз его более.

Доказательство. Пусть Y_{n+1} определяется, как и выше, соотношением

$$Y_{n+1} = MY_n, \quad Y_0 = Z_0, \quad (1.3.4)$$

тогда

$$Y_{j+L(p^m)} = Z_j + C_{1,j}p^m.$$

Причем $c_{1,j}$ можно считать неотрицательным числом. Если $c_{1,1}$ делится на p , то $L(p^{m+1}) = L(p^m)$. В противном случае найдется натуральное r , для которого $c_{1,1} \equiv r \pmod{p}$ и, следовательно, $c_{1,j} \equiv rj \pmod{p}$. Так как p — простое, то $jr \not\equiv 0 \pmod{p}$ при $j = 1, 2, \dots, p-1$ и $jr \equiv 0 \pmod{p}$ при $j = p$. Отсюда следует $L(p^{m+1}) = pL(p^m)$, что и завершает доказательство.

Лемма 3.4. *Если $X(P)$ такова, что $L(p^{m+1}) = pL(p^m)$, то $L(p^{l+m}) = p^l L(p^m)$, где l и m — натуральные числа.*

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения, при $l = 2$ имеем $c_{i,p} \equiv pr \pmod{p^r}$. Следовательно $c_{i,j}p \equiv jpr \pmod{p^r}$. Отсюда, как и при доказательстве леммы 8.6, следует $jpr \equiv 0 \pmod{p^r}, j = 1, 2, \dots, p-1$ в то время как $ppr \equiv 0 \pmod{p^r}$. Доказательство для $l > 2$ может быть легко проведено по индукции.

Как уже было сказано, мы рассматриваем подробно лишь случай $P = 2^m$, хотя результат для P равной степени любого простого числа получается здесь автоматически. Подробные исследования общего случая см. Янсон [11], Кнут [1]. Очевидно, что для нашей последовательности

$$Z_{n+1} \equiv MZ_n \pmod{2^m}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.3.5)$$

справедлива следующая

Теорема 1.9. *Максимальная длина периода последовательности $x_{n+1} \equiv Mx_n \pmod{2^m}$ при $m \geq 3$ есть 2^{m-2} и достигается при $M \equiv 3 \pmod{8}$ или $M \equiv 5 \pmod{8}$ для всех нечетных x_0 .*

Доказательство следует из леммы 3.4 и таблицы, содержащей результаты непосредственных вычислений при $m = 1, 2, 3, 4$ и различных M , если заметить, что случай $M > 2^s$ при $P = 2^s$ сводится к случаю $M_1 < 2^s$, где $M \equiv M_1 \pmod{2^s}$ (s — натуральное число). Кроме того, легко видеть, что увеличение периода в два раза с увеличением m от четырех до пяти достигается за счет появления в последовательности новых членов, каждый из которых сравним с одним и только с одним из старых по модулю 8. А в общем случае при переходе от m к $m+1$ добавляются новые члены, каждый из которых сравним с одним и только одним из старых по модулю 2^m . Это полностью доказывает теорему и приводит к следствию, дающему состав последовательности с максимальным периодом в рассматриваемом случае.

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Если $M \equiv 3 \pmod{8}$ и $x_0 \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$, то

последовательность вида $x_{n+1} \equiv Mx_n \pmod{2^m}$ состоит из чисел вида $8k + 1$ и $8k + 3$, $k = 0, 1, \dots, 2^{m-3} - 1$.

2. Если $M \equiv 3 \pmod{8}$ и $x_0 \equiv 5, 7, 13, 15 \pmod{16}$, то эта последовательность состоит из чисел вида $8k + 5$ и $8k + 7$, $k = 0, 1, \dots, 2^{m-3} - 1$.
3. Если $M \equiv 5 \pmod{8}$ и $x_0 \equiv 1 \pmod{4}$, то эта последовательность состоит из чисел вида $4k + 1$, $k = 0, 1, \dots, 2^{m-2} - 1$.
4. Если $M \equiv 5 \pmod{8}$ и $x_0 \equiv 3 \pmod{4}$, то эта последовательность состоит из чисел вида $4k + 3$, $k = 0, 1, \dots, 2^{m-2} - 1$.

Таблица

m	M	Состав последовательности	Длина периода
1	1	1,1,1,...	1
2	1	1,1,1,...	1
	3	1,3,1,...	2
3	1	1,1,1,...	1
	3	1,3 или 5,7	2
4	5	1,5 или 3,7	2
	7	1,7 или 3,5	2
	1	1,1,1,...	1
	3	1,3,9,11 или 5,15,13,7	4
	15	1,15 или 3, 13 или 5, 11 или 7,9	4

Заметим без доказательства, что для смешанного метода, т.е. для последовательности вида

$$x_{n+1} \equiv Mx_n + b \pmod{2^m} \quad (1.3.6)$$

максимальный период есть 2^m и последовательность естественным образом состоит из всех чисел от 0 до $2^m - 1$.

Обсудим теперь связь между мультипликативным датчиком (1.3.1) и изучавшимися нами ранее последовательностями дробных долей показательной функции. Можно заметить следующее.

1. Соотношение (1.3.1), определяющее датчик псевдослучайных чисел, может быть записано в форме

$$\alpha_{n+1} = \{Md_n\}, \alpha_0 = \frac{z_0}{2^m}, \quad (1.3.7)$$

где z_0 – целое положительное, $z_0 < 2^m$. При очевидном сходстве (1.3.7) и (1.2.13) очевидно, что в (1.2.13) α_0 должно быть иррациональным. При рациональном α_0 последовательность (1.3.7) имеет период, и среднее $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x) dx$ не может иметь при $\alpha_0 \rightarrow \infty$ своим пределом интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ для любой интегрируемой по Риману f .

2. Пусть M_1 и M_2 два различных мультипликатора, порождающих одинаковые множества чисел (напр., $M_1 \equiv 5 \pmod{8}$ и $M_2 \equiv 5 \pmod{8}$, а $z_0 \equiv 3 \pmod{4}$) (Теорема 1.9). Если x принадлежит этому множеству чисел, а разность $|M_1 - M_2| \pmod{2^m}$ велика, то, очевидно, $\{M_1x\}$ и $\{M_2x\}$ могут различаться очень сильно. Это значит, что последовательности, порождаемые M_1 и M_2 , могут не иметь ничего общего, кроме, может быть, распределения. Вопрос о распределении последовательностей, порождаемых датчиками псевдослучайных чисел, мы обсудим далее, имея в виду:

Определение 1.3.1. Функцией распределения конечного множества вещественных чисел a_1, a_2, \dots, a_N называется функция

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{(-\infty, x]}(a_k) = \frac{1}{N} (\text{число } a_j, \text{ не превосходящих } x)$$

– аналог эмпирической функции распределения.

Функцией распределения последовательности a_1, a_2, \dots, a_N называется

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{F}_N(x),$$

если этот предел существует.

3. Пусть датчик псевдослучайных чисел порождает последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ рациональных чисел, имеющую период 2^μ . $\mu = m - 2$ для мультипликативного датчика и $\mu = m$ для смешанного, определяемого (1.3.6). Как и ранее предполагаем $f(X)$, $X = (x_1, \dots, x_s)$ интегрируема по Риману в единичном s -мерном гиперкубе. Образует векторы $X_k^{(s)} = (\alpha_{(k-1)s+1}, \dots, \alpha_{ks})$, $k = 1, 2, \dots$ и рассмотрим предел

$$\sum[s, f] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k^{(s)}). \quad (1.3.8)$$

Поскольку исходная последовательность имеет период 2^m , то пределом будет конечная сумма, число слагаемых которой зависит от s . При $s = 2^q$, $q < \mu$ число слагаемых будет $2^{\mu-q}$. В случае $s = r \cdot 2^q$, где r — число нечетное, а $q \geq 0$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k^{(s)}) = \frac{1}{2^{\mu-q} \cdot r} \sum_{k=1}^{2^{\mu-q}} \sum_{l=1}^r f(\alpha_{(k-1)s+1+2^q(l-1)}, \dots, \alpha_{ks+2^q(l-1)}).$$

Обозначая через $x_{k,l} = \alpha_{(k-1)s+1+2^q(l-1)}$, имеем для мультипликативного датчика

$$\sum[s, f] = \frac{1}{2^{\mu-q} \cdot r} \sum_{k,l} f(x_{k,l}, \{Mx_{k,l}\}, \dots, \{M^{s-1}x_{k,l}\}),$$

где множество $x_{k,l}$ состоит из чисел вида, указанного в следствии к теореме 1.9, разреженных в 2^q раз и деленных на $2^{\mu-q} \cdot r$. Так, если $M \equiv 5 \pmod{8}$ и $x_0 \equiv 3 \pmod{4}$, то упомянутое множество состоит из чисел вида

$$\frac{4k+3}{2^{m-2}} \cdot 2^q = \frac{4k+3}{2^{m-q-2}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{m-2} - 1.$$

В любом случае мы имеем правильную решетку и, очевидно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum[s, f] = \int_0^1 f(x, \{Mx\}, \dots, \{M^{s-1}x\}) dx. \quad (1.3.9)$$

При $s = 1$ равенство (1.3.9) обозначает, что распределение точек последовательности при $m \rightarrow \infty$ сходится к равномерному. При $s > 1$ и фиксированном M можно утверждать лишь, что распределение векторов $(\alpha_{(k-1)s+1}, \dots, \alpha_{ks})$ сходится в слабом смысле к распределению векторов, составленных аналогичным образом из последовательности дробных долей показательной функции $x, \{Mx\}, \{M^2x\}, \dots$ для почти всех x из $(0, 1)$.

4. Равенство (1.3.9) можно записать в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum [s, f] = \int_0^1 \varphi_M(x) dx. \quad (1.3.10)$$

Далее можно было бы воспользоваться Леммой Сю, но предварительно нужно вернуться к вопросу об оценке погрешности $R_M[f] = \int_{D_s} f(X) dX - \int_0^1 \varphi_M(x) dx$.

В связи с этим можно упомянуть два результата:

4.1 Известно (Соболев И.М., Ермаков С.М. [???]), что для функций, удовлетворяющих условию Гельдера

$$|f(X') - f(X'')| \leq L \sum_{j=1}^s |x'_j - x''_j|^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

$X', X'' \in D_s$, имеет место неравенство (случай $M_1 = M_2 = \dots = M_s = M$)

$$|R_M[f]| \leq \frac{s}{M^\gamma} \cdot L.$$

Его легко получить из неравенства

$$|R_M[f]| \leq \frac{1}{M^s} \sum_{i_1=1}^M \dots \sum_{i_s=1}^M (\bar{m}(i_1, \dots, i_s) - \underline{m}(i_1, \dots, i_s)),$$

т.к. в каждом из гиперкубов с номером (i_1, \dots, i_s) в силу неравенства Гельдера $|\bar{m}(i_1, \dots, i_s) - \underline{m}(i_1, \dots, i_s)| \leq L \frac{s}{M^\gamma}$.

4.2 Интересно отметить, что при $\gamma = 1$ для каждого M можно указать гармонику $f(k_1x + \dots + k_sx) = \exp 2\pi i(k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_sx_s)$, (k_1, \dots, k_s) – целые, не равные нулю одновременно, для которой $|R_M[f]| = 1$. Действительно, поскольку $\varphi_M(x) = f(x, \{Mx\}, \dots, \{M^{s-1}x\})$, то $\bar{\varphi}_M$ соответствующая нашей гармонике, есть

$$\bar{\varphi}_M(x) = \exp(2\pi i(k_1 + k_2M + \dots + k_sM^{s-1})x).$$

Для целочисленных k_j , удовлетворяющих равенству имеем

$$k_1 + k_2M + \dots + k_sM^{s-1} = 0 \quad (1.3.11)$$

имеем $\int_{D_s} \exp(2\pi i(k_1x_1 + \dots + k_sx_s)) dx = 0$, а $\int_0^1 \bar{\varphi}_M(x) dx = 1$.

Легко видеть, что при $M \rightarrow \infty$, ($s > 1$) по крайней мере некоторые из $|k_j|$, удовлетворяющих (1.3.11), также должны стремиться к бесконечности. Для рассматриваемых функций константа L зависит от k_j , модуль которых растет с ростом M . Таким образом результат 4.1 не противоречит 4.2.

4.3 Из сказанного следует, что хотя распределение последовательности (1.3.6), (1.3.7) сходится к равномерному при M конечном и $m \rightarrow \infty$, вопрос о распределении пар, а тем более троек и т.д., составленных из членов этих последовательностей, нуждается в дополнительном исследовании. Остановимся подробнее на случае $s = 2$. При фиксированных k_1 и k_2 найдется M , удовлетворяющее равенству $k_1 + k_2M = 0$, (k_1 и k_2 – целые, не равные нулю одновременно, M – целое, положительное). Для $m = \infty$ при $M \rightarrow \infty$ расстояние $(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ также неограниченно возрастает. При m конечном не должно выполняться равенство $k_1 + k_2M \equiv 0 \pmod{P}$. В этом случае при $M \rightarrow \infty$, очевидно, существуют гармоники, для которых $k_1^2 + k_2^2$ остается конечным. Таким образом, мы видим, что для наших целей мы можем воспользоваться леммой Сю ($n^\circ 4.1$), лишь в случае, если m и M стремятся к бесконечности специальным образом.

Исследование сравнений вида

$$k_1 + k_2M + \dots + k_sM^{s-1} \equiv 0 \pmod{P}$$

при k_1, \dots, k_s – целых и $M > 0$ – целом является сложной задачей теории чисел. Решение подобной задачи выходит за рамки нашего краткого

курса. Принято (Ковью-Макферсон [], Кнут, т. 2) числа

$$V_s(M) = \max_{k_1, \dots, k_s} ((k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_s^2)^{1/2} : k_1 + k_2 M + \dots + k_s M^{s-1} \not\equiv 0 \pmod{P})$$

считать характеристиками качества датчика псевдослучайных чисел. Целесообразность введения такого критерия мы объяснили ранее. $V_s(M)$ называют волновым числом.

Известно, что существует подпоследовательность $M \rightarrow \infty$ такая, что $V_s(M) \rightarrow \infty$ для всех s . (см. Кнут [], т. 2). Имеются многочисленные эксперименты по выбору оптимальных в смысле критериев V_s датчиков.

Мы ограничимся качественным обсуждением проблемы моделирования случайности⁵. Конкретные рекомендации, основанные на численных экспериментах, можно найти в обширной доступной литературе.

⁵По этому поводу см. также статью [17], где качественный анализ основан на случайном выборе первого числа последовательности (1.3.6)

В заключение параграфа заметим, что мы рассмотрели подробно один из возможных алгоритмов, дающих "приближенно" случайные последовательности. Возможны и рассматриваются в литературе другие алгоритмы (см. в особенности Таусворт, Нидеррейтер). Наш алгоритм был основан на свойстве отображения

$$x \rightarrow (x, \{M_k x\}, \dots, \{M_k^{s-1} x\})$$

отрезка $[0, 1)$ на s -мерный гиперкуб. Представляет интерес изучение других подобных отображений на предмет моделирования случайности.

Алгоритм, предложенный Таусвортом, вычисляет последовательно двоичные разряды псевдослучайного числа следующим образом.

Пусть c_1, \dots, c_n — заданный набор нулей и единиц, причем $c_1 = 1$. Двоичные разряды ε_k , $k = 1, \dots$ определяются рекуррентно с помощью соотношения

$$\varepsilon_k = c_1 \varepsilon_{k-1} + c_2 \varepsilon_{k-2} + \dots + c_n \varepsilon_{k-n} \pmod{2}. \quad (1.3.14)$$

Вектор $\varepsilon_m, \varepsilon_{m-1}, \dots, \varepsilon_{m-n+1}$ повторяется не более чем через $L = 2^n - 1$ шагов и, следовательно, последовательность имеет период не превосходящий L .

Необходимым и достаточным условием того, чтобы период был максимальным является примитивность полинома

$$f(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

над полем $GF(2)$. Примитивные полиномы над $GF(2)$ подробно изучены и имеются таблицы их коэффициентов.

Составим двоичную дробь $0, \varepsilon_{qk-1}, \varepsilon_{qk-2}, \dots, \varepsilon_{qk-l}$, $l \leq n$. Анализ поведения полученных таким образом чисел в предположении $q \geq l$ и взаимной простоты q и $2^n - 1$, выполненной в [11] показывает хорошие свойства равномерной распределенности (при $l \rightarrow \infty$ последовательность становится вполне равномерно распределенной). Средние по начальным данным парные корреляции оказываются близкими к нулю.

Глава 2. Моделирование случайных величин и процессов

2.1 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

Далее мы рассмотрим некоторые методы моделирования случайных величин с заданным законом распределения (отличных от равномерного на промежутке $[0, 1]$ закона). Задача моделирования упомянутых случайных величин имеет очень большое прикладное значение. Ей посвящена обширная литература. Мы сошлемся на монографию Девроя [12], а также на важную работу Кнута и Яо [14]. В упомянутой литературе имеется много ссылок на работы по рассматриваемому вопросу.

Мы остановимся лишь на общих методах моделирования. Конкретные распределения будут фигурировать лишь в качестве примеров применения общих методов.

Будем различать два случая: 1) исходной для моделирования нужной случайной величины является случайная величина равномерно распределенная на $[0, 1]$ (предполагается, что она задается с необходимым для наших целей числом двоичных разрядов); 2) исходной является последовательность случайных битов, на основе которой вычисляется последовательность битов двоичного представления моделируемой случайной величины.

Условно можно считать, что в первом случае используется мультипликативный датчик (1.3.1), а во втором датчик случайных битов Таусворта (1.3.12). Сначала мы будем рассматривать задачу в предположении (1), считая исходными независимые реализации α случайной величины равномерно распределенной на $[0, 1]$.

1. Формула обращения. Хорошо известна формула обращения, дающая принципиальное решение задачи вычисления реализации ξ случайной величины с заданной непрерывной равномерно распределенной по известной реализации α . Справедлива

Теорема 2.1. Пусть F непрерывная функция распределения на R^1 и

обратная к ней определена формулой

$$F^{-1}(x) = \inf\{t : F(t) = x; 0 < x < 1\}, \quad (2.1.1)$$

тогда, если α равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина, то $F^{-1}(\alpha)$ имеет своей функцией распределения F .

Доказательство. Пусть $\xi = F^{-1}(\alpha)$. Поскольку $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x)$, то имеем $\mathbf{P}(\xi \leq x) = \mathbf{P}(F^{-1}(\alpha) \leq x) = \mathbf{P}(\inf\{t : F(t) = \alpha\} \leq x) = \mathbf{P}(\alpha \leq F(x))$.

Далее, т.к. $0 \leq F(x) \leq 1$, а α равномерно распределена на $[0, 1]$, то $\mathbf{P}(\alpha \leq F(x)) = F(x)$, т.е. $F_\xi(x) = F(x)$, что и доказывает теорему.

Замечание. Легко доказать и обратное утверждение. Если ξ случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$, то $F(\xi)$ равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$.

Действительно, для $x \in (0, 1)$ $\mathbf{P}(F(\xi) \leq x) = \mathbf{P}(\xi \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$, что и доказывает последнее утверждение.

Непосредственное использование формулы обращения в вычислительных процедурах, как правило, мало эффективно. Нужно, чтобы F имела достаточно простое аналитическое выражение. Например,

Пример 2.1. Экспоненциальное распределение (λ -параметр) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Имеем $F^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$. Или с учетом того, что $1 - \alpha$ распределено равномерно на $[0, 1]$ (т.е. как и α) имеем

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha. \quad (2.1.2)$$

Пример 2.2. Распределение Парето (a и b — параметры)

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \geq b > 0,$$

$$F^{-1}(\alpha) = \frac{b}{(1 - \alpha)^{1/a}} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{b}{\alpha^{1/a}}. \quad (2.1.3)$$

Легко видеть, однако, что весьма популярное — нормальное распределение не допускает простого вычисления $F^{-1}(\alpha)$. Решение

уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-u^2/2} du = \alpha. \quad (2.1.4)$$

требует либо использования сложных асимптотических рядов, либо запоминания достаточно подробной таблицы функции $erf(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$. С ее помощью путем интерполирования можно достаточно точно находить ξ , соответствующее данному α в (2.1.4).

Здесь мы видим, что существует принципиальная разница между

- (а) задачами, допускающими предварительную алгоритмическую подготовку — составление таблиц обратной функции $F^{-1}(x)$, построение полиномиальных (обычно кусочно-полиномиальных) ее аппроксимаций и т.п. и
- (б) задачами, где значительные затраты на предварительные вычисления не оправданы и требуется "не слишком плохой" алгоритм моделирования, позволяющий решить (одноразовую) задачу с разумными затратами времени компьютера.

Разумеется, задача моделирования нормального распределения есть, как правило, задача (а). Имеется обширная библиография, посвященная специально этому распределению. Здесь в связи с формулой обращения полезно обратить внимание на тот любопытный факт, что для получения одной реализации нормально распределенной ξ формула обращения не пригодна, но получить сразу две точно независимых реализации с ее помощью сравнительно просто.

Пример 2.3. Действительно, пусть ξ и η независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Плотность их совместного распределения есть

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Переход к полярным координатам $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \sin \psi$ дает для плотности совместного распределения случайных величин ρ и ψ выражение

$$\frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}.$$

Мы видим, что случайный угол ψ равномерно распределен на окружности (с плотностью $\frac{1}{2\pi}$), а ρ имеет плотность $re^{-r^2/2}$, $r \geq 0$, к которой легко применяется формула обращения. Окончательно имеем

$$\xi = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2, \quad \eta = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2. \quad (2.1.5)$$

Мы видим, что задачи эффективного моделирования случайной величины — это не просто задачи выбора удобного метода решения уравнения $F(\xi) = \alpha$. Они обладают несомненным своеобразием и требуют развития специальных методов.

Пример 2.4. Алгоритм моделирования (дискретной) случайной величины, принимающей значения a_1, \dots, a_n, \dots соответственно с вероятностями p_1, \dots, p_n, \dots , формально весьма схож с алгоритмом решения уравнения $F(x) = \alpha$. Введение несколько более общего определения обратной функции может привести нас прямо к этой формуле, но очень простые рассуждения позволяют решить задачу непосредственно. Итак, пусть дискретное распределение задано таблицей

a_1	a_2	\dots	a_n	\dots
p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

причем $\sum_1^{\infty} p_i = 1$, a_i различны и, не умаляя общности, предполагается, что $p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Заметим, что из определения равномерного распределения следует, что

$$P(S_{n-1} \leq \alpha < S_n) = p_n, \quad n = 2, \dots \quad (2.1.6)$$

Откуда вытекает, что случайный номер i_0 величин a_1, \dots, a_n, \dots , соответствующий данному α , может быть определен из неравенства

$$S_{i_0-1} \leq \alpha \leq S_{i_0}, \text{ т.е.} \quad (2.1.7)$$

$$0 \leq \alpha - S_{i_0-1} < P_{i_0},$$

(см. рис. 2, а также сравните с формулой (2.1.1)).

Замечание. Алгоритм нахождения i_0 есть алгоритм поиска в таблице. В случае, когда таблица конечна (имеет объем N), нужное i_0 можно найти, по крайней мере, за $\ln_2 N$ операций.

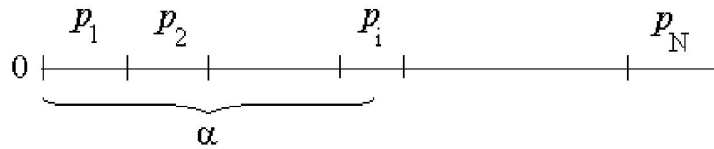


Рис. 1.

Описание алгоритма. Необходимо предварительно вычислить суммы S_n . Храним массив S_n , $n = 1, \dots, N$ и текущие данные $\langle \text{начало} \rangle$, $S(\text{нач.})$, $\langle \text{конец} \rangle$, $S(\text{кон.})$, $\langle r \rangle$.

1. $\langle \text{начало} \rangle := 0$, $\langle \text{конец} \rangle := N$,
 $S(\text{нач.}) = 0$, $S(\text{кон.}) = 1$ — нач. засылки.
2. α . Вычисляем реализацию равномерно распределенной случайной величины.
3. $r := \lfloor \frac{\langle \text{конец} \rangle - \langle \text{начало} \rangle}{2} \rfloor$
 $\lfloor a \rfloor$ означает целую часть числа a .
4. $S(r) < \alpha$.
 Если да, то 5, если нет, то 6. (2.1.8)
5. $\langle \text{начало} \rangle + r$; $s(\text{нач.}) := s(\text{нач.}) + S(r)$.
6. $\langle \text{конец} \rangle := \langle \text{конец} \rangle - r$; $s(\text{конец.}) := S(\text{конец.}) - S(r)$.
7. $\langle \text{конец} \rangle - \langle \text{начало} \rangle \leq 1$.
 Если нет, то 3, если да, то r есть результат работы алгоритма.

Если N бесконечно, то используем метод композиции (см. далее).

2. Использование аппарата условных вероятностей. Далее будем рассматривать задачу моделирования случайного вектора $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$, предполагая существование плотности $f(x_1, \dots, x_s)$ совместного распределения его компонент на R^s . Отметим, что это предположение делается скорее для упрощения обозначений, чем по существу.

Компоненты реализации случайного вектора Ξ могут быть получены путем последовательного моделирования следующей последовательности плотностей

$$\begin{aligned}
\phi_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s f(x_1, \dots, x_s) \text{ для } \xi_1, \\
\phi_2(x_2/\xi_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s f(\xi_1, x_2, \dots, x_s) / \\
&/ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s f(\xi_1, x_2, \dots, x_s) \text{ для } \xi_2, \\
\phi_s(x_s/\xi_1, \dots, \xi_{s-1}) &= f(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, x_s) / \\
&/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, x_s) dx_s \text{ для } \xi_s,
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

т.е. ξ_1 находится путем моделирования $\phi_1(x)$ — частной (одномерной) плотности ее распределения и далее, если найдены выборочные значения ξ_1, \dots, ξ_k , ($k < s$), то строится условная при этом условии плотность распределения ξ_{k+1} и моделируется соответствующее выборочное значение ξ_{k+1} .

Процедура требует s независимых реализаций равномерно распределенных случайных величин $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и принципиально решает задачу моделирования случайного вектора Ξ . Необходимость вычисления интегралов делает ее еще более сложной, чем в одномерном случае, однако возможность разного рода замен переменных позволяет в отдельных случаях получать от нее практическую пользу.

Разумеется, также, что нумерацию переменных x_i можно изменить произвольным образом.

Если непосредственное практическое применение формул (2.1.8) приводит к сложным алгоритмам, то теоретическое использование их или их модификаций может быть весьма плодотворным.

Как мы уже видели, в случае применения формулы обращения для моделирования нормального распределения, увеличение размерности может давать неожиданно положительный эффект. Прием такого рода служит источником эффективных алгоритмов и во многих других случаях.

Пусть ставится задача моделирования случайного вектора $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ с плотностью $\phi(x_1, \dots, x_s)$ совместного распределения компонент. Добавим еще одну компоненту ξ_{s+1} так, что плотность

компонент вектора (Ξ, ξ_{s+1}) будет задана формулой

$$f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) = \begin{cases} 1/C, & 0 \leq x_{s+1} \leq \phi(x_1, \dots, x_s)C, \quad C > 0 \\ 0, & x_{s+1} > \phi(x_1, \dots, x_s) \text{ или } x_{s+1} < 0, \end{cases}$$

т.е. вектор (Ξ, ξ_{s+1}) равномерно распределен в области, ограниченной поверхностью $x_{s+1} = C\phi(x)$ и гиперплоскостью $x_{s+1} = 0$.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ в R^s и конечен интеграл $\int_{R^s} \varphi_1(x) dx = C$.

Из выражения для плотности f и (2.1.9) легко получить:

1. Частная (маргинальная) плотность распределения вектора Ξ есть

$$\int dx_{s+1} f(x, x_{s+1}) = \int_0^{C\varphi(x)} \cdot 1/C dx_{s+1} = \varphi_2(x) \quad (2.1.10)$$

2. Условная плотность случайной величины ξ_{s+1} при фиксированном векторе $\Xi = \tilde{\Xi}$ есть

$$\frac{f(\tilde{\Xi}, x_{s+1})}{\int_{R^1} f(\tilde{\Xi}, x) dx} = \frac{1/C}{1/C \int_0^{C\varphi(\tilde{\Xi})} dx_{s+1}} = \frac{1}{C\varphi(\tilde{\Xi})} \quad (2.1.11)$$

Из полученных формул (2.1.10), (2.1.11) вытекает следующее правило моделирования случайного вектора, равномерно распределенного в области $A = (x_1, x_2, \dots, x_{s+1} : 0 \leq x_{s+1} \leq C\varphi(x_1, \dots, x_s))$.

1. Моделируя случайный вектор Ξ с плотностью распределения $\varphi(x)$, получаем значение $\Xi = \tilde{\Xi}$.

2. На промежутке $[0, 1/C\varphi(\tilde{\Xi})]$ моделируем случайную величину, равномерно распределенную на этом промежутке. Получаем ее реализацию $\xi_{s+1} = \tilde{\xi}_{s+1}$.

Сл. вектор $(\tilde{\Xi}, \tilde{\xi}_{s+1})$, построенный таким образом, будет равномерно распределен на множестве A в силу (2.1.11) и (2.1.12).

Из (2.1.10) также вытекает немедленно

Утверждение 2.1. Если вектор (Ξ, ξ_{s+1}) равномерно распределен в области A , то:

1. Ξ имеет плотностью распределения $\varphi(x)$.

2. При фиксированном Ξ и $\varphi(\Xi) > 0$ случайная величина ξ_{s+1} равномерно распределена на промежутке $[0, C\varphi(\Xi)]$. Последнее утверждение следует из (2.1.11).

Алгоритм 2.1. Моделирование случайного вектора Ξ, ξ_{s+1} равномерно распределенного в области $\mathcal{D}_g = \{(x_1, \dots, x_{s+1}) : 0 \leq x_{s+1} \leq g(x_1, \dots, x_s), |\mathcal{D}_g| < \infty\}$. $g = c\varphi(x)$.

1.1. Вычисляем реализацию $\hat{\Xi}$ вектора Ξ , распределенного с плотностью $1/|\mathcal{D}_g|g(x_1, \dots, x_s)$.

1.2. Находим реализацию $\hat{\xi}_{s+1}$ случайной величины равномерно распределенной на отрезке $[0, g(\hat{\Xi})]$.

Вектор $(\hat{\Xi}, \hat{\xi}_{s+1})$ есть решение задачи.

Замечание. Если $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_g$, то реализации вектора (Ξ, ξ_{s+1}) равномерно распределенного в \mathcal{D}_g и принадлежащие \mathcal{D}_0 , очевидно, равномерно распределены в \mathcal{D}_0 (Условная плотность (Ξ, ξ_{s+1}) при условии $(\Xi, \xi_{s+1}) \in \mathcal{D}_0$ есть константа). Это замечание служит обоснованием простейшего варианта метода отбора.

Алгоритм 2.2.(Метод отбора). Моделирование равномерно распределенного в \mathcal{D}_0 вектора при условии, что мы умеем моделировать равномерно распределенный вектор в $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$. (Например, с помощью Алгоритма 1, если $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_g$ при некоторой g).

2.1. Моделируем вектор, равномерно распределенный в \mathcal{D}_1 , вычисляем его реализацию $(\hat{\Xi}, \hat{\xi}_{s+1})$.

2.2. Если $(\hat{\Xi}, \hat{\xi}_{s+1}) \in \mathcal{D}_0$, то это есть нужное значение вектора, если это не так, то возвращаемся к 2.1.

При условии $|\mathcal{D}_0| > 0$ процесс оканчивается с вероятностью 1. Величина $|\mathcal{D}_0|/|\mathcal{D}_1|$ называется эффективностью метода отбора.

Теперь мы можем сформулировать метод отбора для моделирования случайного вектора с заданной плотностью в его наиболее известной классической форме. Пусть плотность $\phi(x_1, \dots, x_s)$ ограничена и отлична от нуля на ограниченном множестве G ; $g(x_1, \dots, x_s) \leq M$, а G содержится в параллелепипеде $G \subset \Pi = \{x_1, \dots, x_s : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, s\}$.

Алгоритм 2.3. (Классический метод отбора).

3.1. Получаем реализацию $\hat{\Xi}$ случайного вектора Ξ равномерно распределенного в G . (Например, с помощью Алгоритма 2 и Алгоритма 1. Напомним, что равномерное распределение в Π , мы моделировать умеем).

3.2. Получаем реализации $\hat{\xi}_{s+1}$ случайной величины ξ_{s+1} равномерно распределенной на промежутке $[0, M]$.

3.3. Проверяем неравенство $\hat{\xi}_{s+1} \leq \phi(\hat{\Xi})$, если оно выполнено, то $(\hat{\Xi}, \hat{\xi}_{s+1})$ есть нужный нам вектор, если нет, то нужно вернуться к 3.1.

Эффективность описанного алгоритма есть $1/M|\Pi|$, если для моделирования Ξ также используется метод отбора.

Более общим вариантом метода отбора, не требующим ограниченности ϕ и области G является метод мажорант.

Пусть $f(X) \geq \phi(X)$, $\phi(X)$ — плотность, подлежащая моделированию. Моделируем равномерное распределение в области $\mathcal{D}_f = \{X : 0 \leq x_{s+1} \leq f(X)\}$. Объем $|\mathcal{D}_f|$ предполагается конечным. Очевидно, $|\mathcal{D}_f| \geq 1 = |\mathcal{D}_\phi|$ и можно использовать Алгоритм 2. Это дает

Алгоритм 2.4. (Метод мажорант).

4.1. Получаем реализацию $\hat{\Xi}$ случайного вектора, распределенного с плотностью $f(X)/|\mathcal{D}_f|$.

4.2. Получаем реализацию $\hat{\xi}_{s+1}$ случайной величины равномерно распределенной на промежутке $[0, f(\Xi)]$.

4.3. Проверяем условие $\hat{\xi}_{s+1} \leq \phi(\hat{\Xi})$. Если оно выполнено, то $\hat{\Xi}$ искомое значение случайного вектора, распределенного с плотностью $\phi(X)$, если нет, то переходим к п.1.

Эффективность метода есть $1/|\mathcal{D}_f|$.

Пример 2.5. $\varphi(x) = Ce^{-x} \cos^2 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int e^{-x} \cos^2 x dx = \frac{e^{-x}}{s} (\sin 2x - \cos^2 x - 2) + const.$$

Константа нормировки $C = 1/5(3 - 2e^{-\pi/2})$. Формула обращения $e^{-\xi}(2 + \cos^2 \xi - \sin 2\xi) = 3 - (3 - 2e^{-\pi/2})\alpha$. Получения значения ξ требует решения трансцендентного уравнения.

С другой стороны, плотность мажорируется функцией $y = C \cos^2 x$ или $y = Ce^{-x}$, можно выбрать более простой вариант. Моделирование показательного распределения проще, но эффективность отбора выше при $y = C \cos^2 x$. Впрочем, в этом случае можно применить простейший вариант метода отбора. Полезно сравнить эффективности всех методов.

Пример 2.6. $\varphi(x) = \frac{xe^{2-x}}{(x-1)^2}$, $x \in [2, \infty)$.

Легко проверить, что формула обращения в этом случае $\frac{e^{2-\xi}}{\xi-1} = \alpha$ также требует решения трансцендентного уравнения. Здесь применение метода мажорант необходимо. Мажорантой является $y = e^{2-x}$. (Промежутки неограничен).

Вернемся к случаю дискретного распределения. Пусть случайная величина принимает значение n с вероятностью p_n , $p_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Рассмотренный выше прием увеличения размерности здесь также приводит к интересным результатам. Пусть \mathcal{D} — любая область в R^2 , разделенная на непересекающиеся подобласти \mathcal{D}_n , $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$ такие, что площадь \mathcal{D}_n есть p_n . Тогда, если мы умеем моделировать равномерно распределенную точку в \mathcal{D} , то попадание ее в \mathcal{D}_n может интерпретироваться как исход с номером n для заданной дискретной случайной величины.

Это соображение служит обоснованием метода отбора в дискретном случае. Действительно, пусть N конечное число. Выберем N отрезков Δ_i с положительной длиной $|\Delta_i| > 0$ и положим $\tilde{p}_i = p_i/|\Delta_i|$. Отложим отрезки длины $|\Delta_i|$, $i = 1, \dots, N$ на вещественной оси и построим на каждом Δ_i прямоугольник высотой в \tilde{p}_i (Рис. 2) так, что площадь r -го прямоугольника есть p_i . Пусть $\rho = \max_i p_i$. В этом случае вся фигура содержится в прямоугольнике A со сторонами длины ρ и $|\Delta| = \sum_{i=1}^N \Delta_i$ соответственно.

Теперь моделирование нашей случайной величины производится следующим образом.

Алгоритм 2.5. (Метод отбора в дискретном случае).

5.1. Получаем ξ_1 и ξ_2 две независимых реализации случайных величин, распределенных на $[0, \rho]$ и $[0, |\Delta|]$ соответственно.

5.2. Если точка (ξ_1, ξ_2) принадлежит прямоугольнику с номером n , то n есть нужная нам реализация. В противном случае переход к 5.1.

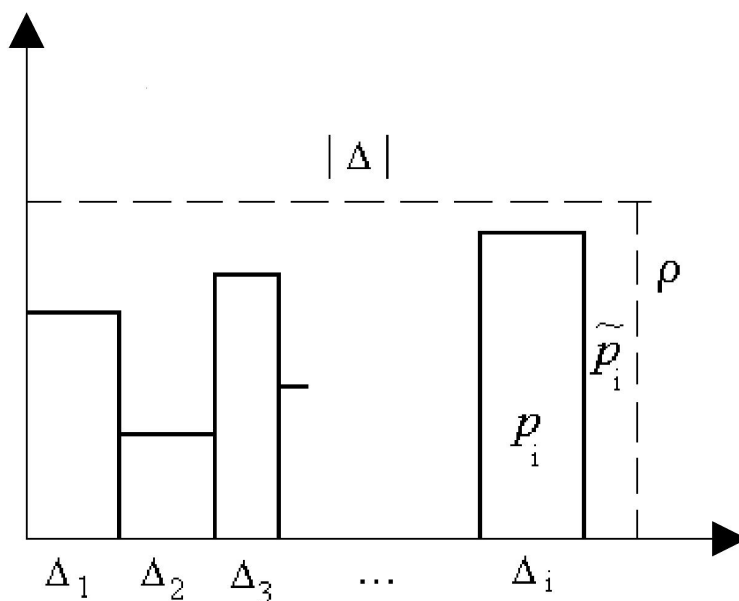


Рис. 2.

Легко видеть, что при $|\Delta_i| = p_i$ мы приходим к случаю, рассмотренному ранее и реализацию ξ_1 можно не получать.

Подобная интерпретация дискретного распределения позволяет построить метод мажорант (N в этом случае не обязательно быть конечным). Пусть $H(x)$ кусочно постоянная функция, равная h_i на Δ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ и $h_i \geq p_i$. Предположим, что $H = \sum_{i=1}^n h_i |\Delta_i| < \infty$. Обозначим $A = \{x, y : 0 \leq y \leq H(x)\}$. Предполагаем, что мы умеем моделировать точку равномерно распределенную в A . Для этого, в частности, достаточно уметь моделировать дискретное распределение $\{h_i/H\}_{i=1}^N$.

Алгоритм 2.6. (Метод мажорант в дискретном случае).

6.1. Получаем реализацию r случайной величины с распределением $\{h_i/H\}_{i=1}^N$.

6.2. Получаем реализацию ξ случайной величины равномерно распределенной на $[0, h_r]$.

6.3. Проверяем условие $\xi \leq p_r$. Если да, то r — нужное нам число, если нет, то переход к 6.1.

Если все $|\Delta_i|$ равны между собой, то условие п. 6.3 выглядит следующим образом: $\alpha h_r \leq p_r$, где α — равномерно распределенная случайная величина на $[0, 1]$.

Замечание 1. О моделировании случайного вектора с дискретным распределением. Если каждая компонента ξ_r случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_s) может принимать целочисленные значения $1, 2, \dots, n_r$, то совместное распределение его компонент задается таблицей $\{P_{i_1, \dots, i_s}, i_r = 1, \dots, n_r, r = 1, \dots, s\}$. Не представляет труда перенесение описанных ранее приемов на этот случай.

Замечание 2. Легко получить обобщения методов отбора, когда в качестве основных распределений выбирается не равномерные, а любые другие заданные распределения. Соответствующие формулы можно найти в литературе ([9],[13]).

Метод композиции. Пусть $F_\eta(y)$ заданное распределение случайной величины η , а $p(X, y) = P(\Xi = X/\eta = y)$ — условная плотность распределения вектора Ξ при фиксированном η . Тогда плотность распределения Ξ равна

$$\phi_\xi(\Xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X, y) dF_\eta(y) \quad (2.1.12)$$

и может моделироваться в два этапа.

1. Находим реализацию $\hat{\eta}$ случайной величины η с функцией распределения $F_\eta(y)$.
2. Моделируем вектор Ξ , имеющий плотность $p(X, \hat{\eta})$.

Несмотря на свою простоту метод очень важен при построении эффективных алгоритмов моделирования.

Пример 2.6. Пусть $\psi(x)$ представлена в виде ряда

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Из условия нормировки имеем $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} = 1$. $\Psi(x)$ можно представить в форме

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (k+1)x^k,$$

и можно считать k случайным номером, распределение которого есть $p_k = \frac{a_k}{k+1}$, k играет роль y , а $p(x, y)$ отождествляется с $(k+1)x^k$.

Алгоритм состоит в выборе случайного номера k_0 в соответствии с распределением $\{\frac{a_k}{k+1}\}$, а затем моделирования плотности $(k+1)x^{k_0}$.

Пример 2.7. Более общий характер имеет следующий пример. Плотность $\Psi(x)$, $x \in R$ разбивается на сумму плотностей следующим образом. Вещественная ось представляется в виде суммы непересекающихся интервалов Δ_k , $k = 1, \dots, N$. Вычисляются числа $p_k = \int_{\Delta_k} \phi(x) dx$ и полагается

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^N p_k \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \begin{cases} 1/p_k \phi(x), & x \in \Delta_k \\ 0 & x \notin \Delta_k \end{cases}, \quad (2.1.13)$$

(предполагается, что все $p_k > 0$).

Процедура моделирования сводится к моделированию дискретного распределения $\{p_k\}$ — выбору случайного номера k_0 , а затем к моделированию $\phi_{k_0}(x)$.

Если ϕ обладает некоторыми свойствами гладкости $\phi \in C^m$, то (рис. 3) она может быть приближена ступенчатой функцией так, что площадью "между" графиком этой ступенчатой функции и кривой $y = \phi(x)$ будет малой ($\sim O(N^{-m})$).

Тогда мы можем свести задачу к моделированию ступенчатой плотности с вероятностью $\sum_{k=1}^N |s_0|$ и с вероятностью $O(N^{-m})$ плотности, получаемой после нормировки заштрихованной части на Рис. 3. Здесь s_k обозначает площадь прямоугольника s_k . Моделирование ступенчатой плотности, в свою очередь, сводится к моделированию дискретного распределения и требует $\log_2 N$ операций. При достаточно большом N это и есть оценка трудоемкости алгоритма. Очевидно, возможны и другие виды аппроксимации разбиений плотностей. Аналогичные

подходы возможны и в многомерном случае, хотя строить ступенчатые аппроксимации здесь существенно более сложно.

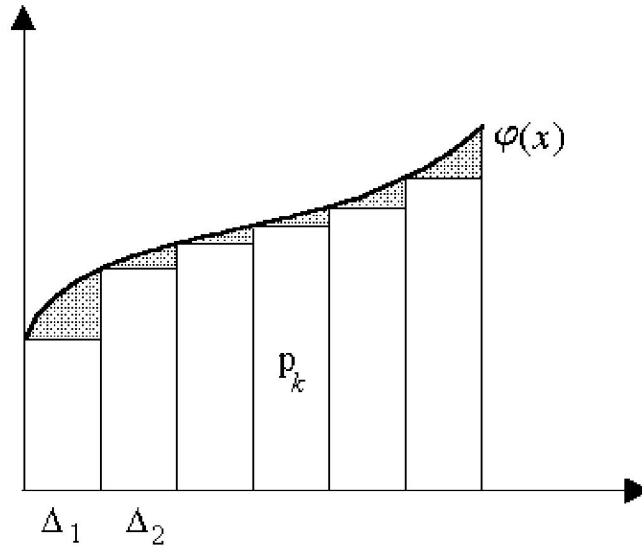


Рис. 3.

Битовые алгоритмы для моделирования дискретных распределений. Если имеется последовательность случайных (псевдослучайных) битов, порождаемых, например, алгоритмом (1.3.9) и имеется алгоритм преобразующий их в биты реализации случайной величины с заданным законом распределения, то такого рода алгоритмы мы будем именовать битовыми. В качестве некоторой абстрактной модели можно говорить о бросании монеты и преобразовании последовательности нулей и единиц, соответствующих исходам бросаний в последовательность битов нужной нам реализации случайной величины.

Битовые алгоритмы изучались Д.Кнутом и Э.Яо [13]. Простейший пример, приведенный в этой работе — это имитация бросания игральной кости с помощью бросания монеты. Бросание (идеальной) кости есть механизм, позволяющий получить с равной вероятностью один из 6 исходов. Моделируется дискретное распределение

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6. \end{array} \quad (2.1.14)$$

Троекратное бросание монеты (1-орел, 0-решка) дает такое

распределение вероятностей

000	001	010	011	100	101	110	111
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8.

Дополняя таблицу (2.1.13) до таблицы

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0.

(2.1.15)

Видим, что распределение табл. (2.1.11) абсолютно непрерывно по отношению к табл. (2.1.15). Здесь можно использовать метод отбора. Его эффективность есть $3/4$, а среднее число бросаний монеты до получения результата есть $\frac{3}{\text{эффективность}} = 3 : 3/4 = 4$.

С другой стороны, исходы, соответствующие 7(111) и 0(000) равновероятны и могут не отбрасываться, а служить началом нового разветвления (т.е. мы уже имеем первую двоичную цифру новой тройки. В этом случае среднее число бросаний уменьшается до $3\frac{2}{3}$. Действительно, бросив первый раз монету трижды, мы затем можем бросать ее лишь дважды. Это и дает $3 \cdot 1 + 2(\frac{1}{3/4} - 1) = 3\frac{2}{3}$. Процедура моделирования может быть представлена в виде бинарного дерева.

Если мы пользуемся описанным экономичным способом, требующим в среднем $3\frac{2}{3}$ бросания монеты (стрелочки возврата на рис. 4), то дерево может быть развернуто в бесконечное дерево с периодической структурой.

Легко показать (см. [13]), что любому дискретному распределению может быть сопоставлено и не единственным образом такого рода бинарное дерево, называемое ПДР (порождающим дискретное распределение) — деревом. В общем случае дерево бесконечно и не обязано иметь периодическую структуру. Дерево, очевидно, однозначно связано с алгоритмом моделирования (ПДР-алгоритмом).

Оптимальным в смысле Кнута и Яо алгоритмом моделирования называется ПДР алгоритм, минимизирующий среднее число (время) бросания монеты (если оно конечно).

Задача построения оптимального ПДР алгоритма для дискретных распределений решена в цитированной выше работе. Дерево (алгоритм)

рисунка является оптимальным. Изложение результатов работы Кнута и Яо потребовало бы много времени и мы ограничимся лишь формулировкой основных понятий, связанных с оптимизацией битовых алгоритмов.

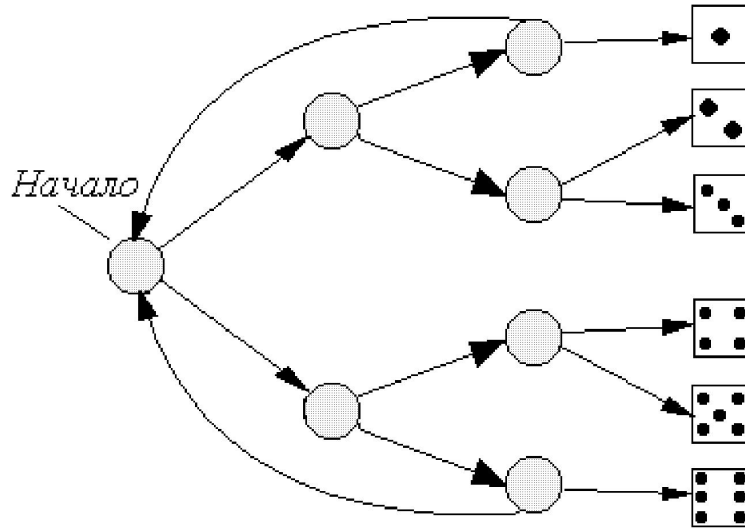


Рис. 4. Имитация бросания одной кости путем тройкратного подбрасывания монеты.

Остановимся более подробно на схеме бросания монеты (она же хорошо исследованная в теории вероятностей схема Бернулли с равновероятными исходами). Повторение эксперимента порождает двоичное дерево с 2^M равновероятными исходами (концевые узлы) при M последовательных независимых бросаниях. Пусть теперь задано распределение вероятностей $\pi = \{p_i\}_{i=1}^N$, событий занумерованных числами $1, \dots, N$ и p_i являются двоично рациональными дробями, имеющими представление

$$p_i = O_2 \pi_1^i, \dots, \pi_m^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.16)$$

Если теперь при бросании монеты мы разделим концевые узлы на непересекающиеся подмножества A_i так, что в A_i войдет

$$\pi_1^i 2^{m+1} + \pi_2^i 2^{m-2} + \dots + \pi_m \quad (2.1.17)$$

концевых узлов, то регистрируя попадание концевого узла в A_i мы получим модель распределения π . (Считаем, что произошло событие с номером i).

В частности, отбор поддеревьев основного дерева с концевыми узлами в A_i мы можем организовать следующим образом.

Если при заданном $k(k \leq M)$ для некоторых значений $i = i_1, \dots, i_m$ ($m < 2^k$) оказывается $\pi_k^{i_l} = 1, l = 1, \dots, m$, то мы помечаем m узлов k -го уровня и считаем, что все "потомки" M -го поколения l -го узла принадлежат множеству A_{i_l} . Таким образом, мы можем прекращать просмотр (реализацию) двоичного дерева по достижении помеченного узла. Легко видеть, что p_i соответствует ровно (2.1.17) из 2^M исходов и эта процедура выделяет ПДР-дерево, содержащее минимальное число конечных узлов.

Одним из важных результатов, полученных в рамках битового подхода является следующий.

Если p_1, \dots, p_n – дискретное распределение, то среднее число битов, необходимых для получения реализации этого распределения $\nu(p_1, \dots, p_n)$ не превосходит величины $\log_2(n - 1) + 2$ (см. [13], с. 113).

Сравните этот результат с оценкой трудоемкости алгоритма на с. (33).

Мы ограничились изложением наиболее употребительных общих методов моделирования распределений. Под общими мы понимаем методы, применимые к любым распределениям или, по крайней мере, к очень широкому классам распределений.

В начале главы 1 были сформулированы свойства равномерно распределенных случайных величин, позволяющие, в частности, оценивать интегралы высокой кратности от интегрируемых по Риману функций. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения позволяет с помощью суммы $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(Y_j)$, где Y_j — независимые реализации случайного вектора с плотностью $p(Y)$ оценивать интеграл $\int f(X)p(x) dX$. Обоснованием такого рода оценивания очевидным образом служит также Закон Больших Чисел.

Однако, статистическое моделирование (метод Монте-Карло) наиболее эффективно при решении еще более сложных задач — решении больших систем уравнений, моделировании сложных систем.

Используя изложенные выше методы мы можем создавать имитационные модели явлений, допускающих теоретико-вероятностное описание. Некоторые простые примеры приводятся ниже. Подробнее см., например, [9].

2.2 Моделирование случайных процессов. Интегралы по траекториям

Случайные процессы — тема весьма обширная. Мы будем рассматривать исключительно алгоритмические аспекты, избегая общего абстрактного подхода. В большинстве случаев случайный процесс будет описан как алгоритм моделирования. Конечно, мы не сможем избежать упоминания некоторых известных фактов математической теории, но доказывать мы их не будем (См., например, [14]).

Приведем, однако, некоторые основные определения. Случайным процессом на вероятностном пространстве (Ω, σ, P) называется семейство случайных величин $\xi(t, \omega)$, зависящих от вещественного параметра t , $t \in R^1$.

Пусть t_1, t_2, \dots, t_n некоторые значения параметра t из множества H . Совместные распределения случайных величин $\xi(t_1, \omega), \xi(t_2, \omega), \dots, \xi(t_n, \omega)$ при всевозможных n и наборах t_1, \dots, t_n называются конечномерными распределениями вероятностей случайного процесса.

Согласно теореме Колмогорова заданное для всевозможных n и t_1, \dots, t_n семейство функций распределения $F_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) \rightarrow P(\xi(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, \xi(t_n, \omega) \leq x_n)$ определяет случайный процесс (т.е. существует вероятностное пространство) (Ω, σ, P) и семейство измеримых функций $\xi(t, \omega), \omega \in \Omega$, если выполнимы условия согласования

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = F_{n-1}(x_1, t_1, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.2.1)$$

Таким образом, задача моделирования случайного процесса может быть сведена к задаче моделирования заданного семейства распределений.

В большинстве случаев, представляющих прикладной интерес, существуют конечномерные плотности совместного распределения для случайного процесса и мы имеем задачу моделирования этих плотностей.

Пусть, например, H есть отрезок $[0, T]$ вещественной прямой. Если для некоторого процесса $\xi(t, \omega)$ заданы всевозможные конечномерные

плотности распределения

$$\phi(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n), \quad (2.2.2)$$

то фиксируя t_1, \dots, t_n и моделируя полученную плотность совместного распределения случайных величин $\xi(t_1, w), \dots, \xi(t_n, w)$ методами предыдущего раздела, мы получим реализацию этих случайных величин. Выбирая, например, $t_j = \frac{1}{n} \cdot j, j = 0, \dots, n-1$ мы можем при достаточно большом n проследить подробно поведение случайного процесса. Проблема, однако, состоит в том, что моделирование случайного вектора большой размерности, как мы видели, может быть задачей очень трудной (трудоемкой). Иногда эти трудности оказываются непреодолимыми даже для современной вычислительной техники.

На практике обычно имеют дело с некоторыми сравнительно узкими классами случайных процессов, для которых либо плотность (2.2.2) распадается на произведение плотностей, зависящих от небольшого числа переменных, либо существуют простые методы моделирования этой плотности.

Для того, чтобы выделить удобные для моделирования процессы напомним следующие определения.

Функция параметра t , равная при каждом фиксированном t величине $E\xi(t, w)$ называется *математическим ожиданием* или *средним значением* случайного процесса, а функция двух переменных $R(\theta, t) = M(\xi(\theta, w)\xi(t, w))$ — *ковариационной функцией*. Ниже даются определения важных частных случаев случайных процессов. Процессы определяются в узком смысле (см. [14]).

Случайный процесс $\xi(\theta) = \xi(\theta, w)$ называется *стационарным*, если связанные с ним распределения вероятностей не зависят от сдвига параметра θ . Если все конечномерные распределения процесса нормальны, то процесс называется *гауссовским* случайным процессом.

Марковским случайным процессом называется процесс, для условных конечномерных распределений которого с вероятностью 1 выполняются равенства

$$P\{\xi(\theta_n) \leq x | \xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_{n-1})\} = P\{\xi(\theta_n) \leq x | \xi(\theta_{n-1})\} \quad (2.2.3)$$

для любых значений параметра $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_n$ из Θ . Условие (2.2.3)

эквивалентно также следующему: для любых $t_1 < t_2$ из Θ и любого x с вероятностью 1

$$P\{\xi(t_2) \leq x | \xi(t), t \leq t_1\} = P\{\xi(t_2) \leq x | \xi(t_1)\}. \quad (2.2.4)$$

Марковский случайный процесс может быть задан переходными вероятностями и начальным распределением вероятностей. В этом случае предполагается, что Θ имеет минимальный элемент Θ_0 , при котором заданы начальное распределение вероятностей p_0 случайной величины $\xi(\theta_0)$ и функция (переходная вероятность) $P(w, t; B, \theta)(w, w' \in \Omega; t, \theta \in \Theta, B \in \mathcal{A})$, удовлетворяющая для почти всех w равенству

$$P(w, t; B, \theta) = \int P(w'', \tau; B, \theta)P(w, t; dw'', \tau) \quad (2.2.5)$$

(уравнение Чепмена-Колмогорова). Последнее обеспечивает выполнение условий согласованности конечномерных распределений процесса.

Мы ограничимся только рассмотрением некоторых частных случаев упомянутых двух типов случайных процессов. Это позволит выяснить некоторые особенности возникающих алгоритмов моделирования и обсудить важные приложения построенных моделей.

Сначала мы обсудим алгоритмическую модель марковского процесса с дискретным временем. Не умаляя общности, считаем, что параметр t принимает значения $t = 0, 1, 2, \dots$. Пусть \mathcal{X} есть фазовое пространство значений марковского процесса $\xi(t)$. Однородный процесс в соответствии со сказанным выше задается распределением своих значений при $t = 0$ (начальным распределением) и при каждом $t > 0$ условным распределением значений $\xi(t + 1)$ при условии, что $\xi(t)$ имеют заданное значение. Процесс может задаваться соответствующими плотностями распределения: $p_0(x)$ и $p(x, y)$ по отношению к мере Лебега.

Легко видеть, что реализация процесса или его траектория — последовательность величин

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

вычисляется следующим образом. Методами § 1 главы 2 моделируем x_0 , распределенный с плотностью $p^\circ(x)$. Затем, если получено некоторое x_t , то x_{t+1} получается в результате моделирования плотности $p(x_t, x_{t+1})$ (при фиксированном x_t).

Таким образом можно получить, вообще говоря, сколь угодно длинную последовательность x_t . В некоторых случаях, однако, существует такое $t = \tau$, что оказывается $x_\tau = x_{\tau+1} = x_{\tau+2} = \dots$, говорят в этом случае, что x_τ принадлежит множеству a поглощающих состояний.

Говорят также, что траектория процесса обрывается при попадании в множество a . Если вероятность попадания в это множество положительна, то плотность перехода нормирована следующим образом

$$\int_{\mathcal{X}} p(x, y) dy = 1 - g(x), \quad (2.2.6)$$

где $g(x)$ есть вероятность поглощения (обрыва траектории) и $0 \leq g(x) \leq 1$. Если $g(x) > 0$ для некоторых x , то моделирование процесса осуществляется следующим образом:

При $t = 0$, x_0 получаем, моделируя плотность $p^\circ(x)$. Если получено x_t , то с вероятностью $g(x_t)$ траектория процесса обрывается, и с вероятностью $1 - g(x_t)$ находим x_{t+1} , распределенный с плотностью

$$\frac{p(x_t, x_{t+1})}{1 - g(x_t)}, \quad (2.2.7)$$

(x_i — фиксировано).

Если множество значений процесса $\xi(t)$ конечно или счетно, то соответствующие распределения дискретны. Процесс — цепь Маркова с конечным или счетным числом состояний — задается вектором начального распределения $p^\circ = (p_1^\circ, \dots, p_n^\circ)$ и матрицей перехода $\mathcal{P} = \|p_{i,j}\|_{i,j=1}^n$, $p_{i,j} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1 - g_i, \quad 0 \leq g_i \leq 1, \quad (2.2.8)$$

где g_i — вероятность обрыва траектории, если цепь находится в состоянии с номером i , а $p_{i,j}$ есть вероятность перехода в состояние с номером j из состояния с номером i (условная вероятность перехода в состояние j в момент времени $t + 1$, если в момент времени t цепь находилась в состоянии с номером i).

Таким образом при $t = 0$ моделируется распределение p° . В результате моделирования мы получаем номер состояния i_0 . Далее, если в момент

времени t цепь находится в состоянии i_t , то с вероятностью g_{i_t} траектория обрывается и с вероятностью $1 - g_{i_t}$ находится следующий номер состояния i_{t+1} распределение которого есть

$$\frac{1}{1 - g_{i_t}}(p_{i_t,1}, \dots, p_{i_t,n}). \quad (2.2.9)$$

Результатом моделирования является последовательность номеров

$$i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots i_t \dots \quad (2.2.10)$$

(траектория процесса). Условия, при которых все траектории марковского процесса обрываются с вероятностью 1 зависят от структуры матрицы \mathcal{P} , а в непрерывном случае от свойств переходной вероятности $p(x, y)$.

Из теории марковских процессов (это следует, в частности, из (2.2.5)) следует, что распределение вероятностей состояний $p_i(t)$ в момент времени t подчиняется уравнению

$$p_i(t + 1) = \sum_j p_{j,i} p_j(t) + g_i \chi_a \quad (2.2.11)$$

или

$$p(t + 1, x) = \int_{\mathcal{X}} p(x, y) p(t, y) dy + g(x) \chi_a \quad (2.2.12)$$

в непрерывном случае. Здесь $p_i(t) = \mathbf{P}\{i_t = i\}$, $p(t, y) = \mathbf{P}(x_t = y)$, а χ_a — характеристическая функция поглощающего состояния. Из уравнений (2.2.11) и (2.2.12) легко усмотреть, что, по крайней мере, при $g_i > 0$ $i = 1, \dots, n$, $g(x) > 0$, $x \in \mathcal{X}$ почти все траектории процесса попадают в поглощающее состояние.

Рассмотрим теперь гауссовский случайный процесс $\xi(t)$. Пусть на промежутке $[0, T]$ заданы моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < T$. $\xi(t)$ полностью определяется заданием своих первых двух моментов — математического ожидания

$$E\xi(t) = f(t) \quad (2.2.13)$$

и ковариационной функции

$$E[(\xi(t) - f(t))(\xi(\tau) - f(\tau))] = R(t\tau). \quad (2.2.14)$$

Распределение случайного вектора

$$\Xi = (\xi(0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_{n-1}), \xi(T))$$

есть многомерное нормальное распределение, задаваемое плотностью

$$\phi_{n+1}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} (\det C)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - F)^T C^{-1}(X - F)\right), \quad (2.2.15)$$

где $X = (x_0, \dots, x_n)^T$, $F = (f(0), f(t_1), \dots, f(T))^T$, $C = \|R(t_i, t_j)\|_{i,j=0}^n$, $t_0 = 0$, $t_n = T$, $\det C \neq 0$.

Таким образом, задача моделирования гауссовского процесса в выбранных точках t_i , $i = 0, \dots, n$ сводится к моделированию многомерной плотности (2.2.15). Алгоритм состоит из подготовительной стадии — разложения матрицы C на произведение двух треугольных и основной — вычисления линейной комбинации $n + 1$ независимых случайных нормально $(0, 1)$ распределенных величин.

Матрица C положительно определена и симметрична и может быть представлена в виде

$$C = \Gamma \Gamma^T, \quad (2.2.16)$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1,n+1} \\ 0 & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2,n+1} \\ 0 & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \text{ верхняя треугольная матрица.}$$

Алгоритм вычисления величин $\gamma_{i,j}$ хорошо известен как один из вычислительных методов линейной алгебры и носит название "метод квадратных корней"[16]. Его легко построить, если заметить, что числа $\gamma_{i,j}$ (при известных $c_{i,j}$) могут быть получены последовательно из цепочки уравнений, получаемой приравниванием соответствующих элементов матриц в правой и левой части равенств (2.2.16).

Обозначим далее $X - F = Y$. Имеем $(X - F)^T C^{-1}(X - F) = Y^T C^{-1} Y = Y^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1} Y = Y^T (\Gamma^{-1})^T \Gamma^{-1} Y = (\Gamma^{-1} Y)^T (\Gamma^{-1} Y)$.

Если теперь сделать в (2.2.15) замену переменных $Z = (\Gamma^{-1} Y)$, то получим

$$\tilde{\phi}_{n+1}(Z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} Z^T Z\right).$$

Случайный вектор, имеющий свою плотностью распределения $\tilde{\phi}_{n+1}(Z)$ является $n + 1$ мерным нормальным случайным вектором с независимыми компонентами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$, причем $\xi_i \in N(0, 1)$. Моделирование ξ_i осуществляется методами, описанными на стр. (33). Затем вектор $\Xi = [\xi(0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_{n-1}), \xi(T)]$ находится по формуле

$$\Xi = F + \Gamma\xi. \quad (2.2.17)$$

Пусть $t_i = T \frac{i}{n}$. В этом случае обычно матрица ковариаций имеет приближенно ленточную структуру — зависимость $\xi(t_i)$ от "далеких" значений убывает с их удаленностью. В этом случае могут быть построены удобные специальные алгоритмы (авторегрессионные модели и т.п.).

Примером гауссовского марковского процесса с непрерывным временем может служить процесс (одномерного) броуновского движения. Если частица начинает движение в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, то вероятность того, что в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n ($0 < t_1 < \dots < t_n$) она будет находиться в промежутке $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ соответственно, определяется равной

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} p(0, x_1; t) p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \dots \\ \dots p(x_{n-1}, x_n; t_n - t_{n-1}) dx_1, \dots, dx_n, \quad (2.2.18)$$

где

$$p(x, y; t) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2t}(y - x)^2\right], \quad (2.2.19)$$

что и определяет конечномерные распределения процесса броуновского движения. Моделирование движения броуновской частицы, благодаря марковости и специальному виду $p(x, y, t)$ может осуществляться путем последовательного увеличения числа точек, в которых моделируется процесс.

Пусть $\xi(t)$ — траектория броуновской частицы и $0 \leq t \leq 1$, $\xi(0) = 0$. Будем приближать $\xi(t)$ посредством ломаных, вершины которых поместим в точках $t_i = i/2^n$ ($i = 0, 1, \dots, 2^n$). Заметим, прежде всего, что при $n = 1$ случайная величина $\xi(1)$ распределена нормально со средним нуль ($\xi(0) = 0$) и дисперсией единица, и ее реализация может быть получена одним из обсуждавшихся ранее способов. Увеличение числа

n не влечет пересчета полученных ранее реализаций. При $n = 2$ $\xi(1/2)$ распределена нормально со средним $(\xi(0) + \xi(1))/2$ и дисперсией $1/4$. Вообще, если получены реализации $\xi(t')$ и $\xi(t'')$, ($t'' > t'$), то $\xi(\frac{t'+t''}{2})$ имеет нормальное со средним $(\xi(t') + \xi(t''))/2$ и дисперсией $(t'' - t')/2$ распределение. Это позволяет дробить последовательно промежутки $[0, 1]$ на части, кратные 2^n , строить ломаные с соответствующим числом звеньев и следить за сходимостью интересующего нас функционала на траекториях к своему предельному значению.

Существует много приемов моделирования специальных классов случайных процессов и мы предполагали рассмотреть только простейшие из них.

Как правило, моделирование процесса не является самоцелью. Вычисляется функционал — число, сопоставляемое данной траектории процесса. Задачи такого рода могут иметь большое прикладное значение. В качестве примера рассмотрим снова однородную цепь Маркова с конечным числом n состояний. Считаем, что время дискретно и траектории цепи обрываются с вероятностью 1.

Пусть цепь задается, как и ранее, начальным распределением p^0 и переходной матрицей $\mathcal{P} = \|p_{i,k}\|$. $\sum_{k=1}^n p_{i,k} = 1 - g_i$. Полагаем для простоты изложения $g_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Полученной в результате моделирования траектории

$$i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_\tau \quad (2.2.20)$$

соответствует вероятность

$$p_{i_0}^0 p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{\tau-1}, i_\tau} g_{i_\tau}. \quad (2.2.21)$$

Таким образом на множестве траекторий определяется вероятностная мера. Действительно, имеет место равенство

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_\tau=1}^n p_{i_0}^0 p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{\tau-1}, i_\tau} g_{i_\tau} = 1. \quad (2.2.22)$$

Чтобы доказать это равенство, заметим, что система линейных алгебраических уравнений

$$Z = \mathcal{P}Z + G \quad G = \|g_1, \dots, g_n\|^T$$

имеет единственное итерационное решение. Это так, ибо первая норма матрицы \mathcal{P} , равная $\max_i \sum_{k=1}^n p_{i,k}$, меньше единицы ($g_i > 0$). Легко видеть

с одной стороны, что это решение есть вектор, все компоненты которого равны 1. Действительно, имеем

$$1 = \sum_{k=1}^n p_{i,k} \cdot 1 + g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Равенство выполняется в силу определения g_i . С другой стороны, решение системы есть $Z = \lim_{m \rightarrow \infty} Z_m$, где $Z_m = \mathcal{P}Z_{m-1} + G$, $Z_0 = G$. Но $Z_m = (I + \mathcal{P} + \dots + \mathcal{P}^m)G$ и легко проверить, что

$$Z = \left\| \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{\tau}=1}^n p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{\tau-1}, i_{\tau}} g_{i_{\tau}} \right\|_{i_0=1}^n, \quad (2.2.23)$$

откуда, в свою очередь, следует

$$(p^0, Z) = 1,$$

что совпадает с (2.2.22), если учесть (2.2.23). Таким образом, множество траекторий с определенной на нем мерой μ , определяемой соответствием (2.2.20)–(2.2.21) есть вероятностное пространство.

Если теперь на траекториях (2.2.20) задан функционал $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{\tau})$ и существует его математическое ожидание, то оно выражается формулой

$$E\Phi = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{\tau}=1}^n \Phi(x_0, \dots, x_{\tau}) p_{i_0, i_0}^0 \dots p_{i_{\tau-1}, i_{\tau}} g_{i_{\tau}}. \quad (2.2.24)$$

Один из широко известных фактов, связанных с представлением (2.2.24) относится к вероятностным методам решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть задана система линейных уравнений вида

$$X = AX + F. \quad (2.2.25)$$

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad F = (f_1, \dots, f_n)^T,$$

причем сходится метод последовательных приближений

$$X_m = AX_{m-1} + F, \quad X_0 = F, \quad m = 1, 2, \dots$$

Это обозначает, что итерационное решение \tilde{X} системы (2.2.25) существует, единственно и может быть представлено в виде

$$\tilde{X} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F \quad (\text{сумма ряда Неймана}).$$

Если выполнены более жесткие условия сходимости так называемого мажорантного итерационного процесса

$$\tilde{X}_m = |A|\tilde{X}_{m-1} + |F|, \quad |A| = \|\|a_{ij}\|\|_{i,j=1}^m,$$

то \tilde{X} представимо в форме

$$\tilde{X} = \|\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \dots, a_{i_{k-1},i_k} f_{i_k} \|\|_{i=1}^n,$$

а скалярное произведение (H, \tilde{X}) , где $H = (h_1, \dots, h_n)$ произвольный заданный вектор в форме

$$(H, \tilde{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n h_{i_0} a_{i_0,i_1}, \dots, a_{i_{k-1},i_k} f_{i_k}. \quad (2.2.26)$$

Достаточно сравнить (2.2.24) с (2.2.26), чтобы указать вероятностный алгоритм вычисления (H, \tilde{X}) .

Действительно, пусть p^0, \mathcal{P} произвольная цепь Маркова, удовлетворяющая условиям (условия согласования)

$$\begin{aligned} p_i^0 &> 0, & \text{если } h_i \neq 0, & \quad i = 1, \dots, n \\ p_{i,j} &> 0, & \text{если } a_{i,j} \neq 0, & \quad i, j = 1, \dots, n, \\ g_i &> 0, & \text{если } f_i \neq 0, & \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

тогда выбирая, например,

$$\Phi(x_0, \dots, x_\tau) = \Phi_0(x_0, \dots, x_\tau) = \frac{h_{i_0} a_{i_0,i_1}, \dots, a_{i_{\tau-1},i_\tau} f_{i_\tau}}{p_{i_0}^0, p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{\tau-1},i_\tau} g_{i_\tau}},$$

видим, что выполняется равенство

$$E\Phi_0 = (H, \tilde{X}), \quad (2.2.28)$$

причем существование математического ожидания следует из сходимости мажорантного итерационного процесса. Моделируя N

независимых траекторий цепи Маркова и вычисляя для каждой значение Φ_0^j , j — номер траектории, $j = 1, \dots, N$, мы можем на основании закона больших чисел оценить (H, \tilde{X}) с помощью среднего арифметического

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi_0^j.$$

Таким образом, мы видим, что вероятностные методы вычислений пригодны не только для оценки интегралов высокой кратности, но и для вычисления существенно более сложных объектов — интегралов по траекториям случайных процессов.

В рассмотренном случае траекторией служила последовательность целых чисел. В заключение параграфа мы приведем пример интеграла по траекториям, являющимися непрерывными кривыми.

Если в качестве пространства Ω выбрать пространство непрерывных на $[0, \infty)$ функций $x(t)$, ($x_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, n$; $x(0) = 0$), то формулы (2.2.18), (2.2.19) определяют вероятностную меру на полукольце множеств вида

$$[a_1 \leq x(t_1) \leq b_1; \dots; a_n \leq x(t_n) \leq b_n],$$

(выполнение условий согласованности легко проверить), и эта мера может быть распространена на все пространство Ω непрерывных функций. В соответствии с общей схемой введения интеграла можно далее определить интеграл, называемый интегралом Винера.

Пусть $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция $x \in (-\infty, +\infty)$. Интеграл Винера

$$J = \int \exp\left[-\int_0^t f(x(\tau)) d\tau\right] \mathbf{P}(dw), \quad (2.2.29)$$

где \mathbf{P} — мера Винера, также можно рассматривать как предел

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)\right] p(0, x_1; t_1) \dots \\ \dots p(x_{n-1}, x_n; t_n - t_{n-1}) dx_1 \dots dx_n,$$

который с учетом (2.2.19) может быть также записан в виде

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi t n^{-1})^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-t n^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 / t n^{-1} \right\} \right] dx_1 \dots dx_n,$$

что позволяет записать J в форме

$$\int \exp \left[- \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + f((x)(\tau)) \right\} d\tau \right] dx(\text{траектория}).$$

С мерами на пространстве функций связаны многие уравнения в частных производных. С интегралами по этим мерам связаны важные прикладные задачи. Вычисление интегралов по траекториям случайных процессов с помощью моделирования занимает важное место в вычислительной математике.

Литература

- [1] Д.Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. т.2. Получисленные алгоритмы. Мир, Москва, 1997, 724 с.
- [2] Jansson.B., Random number generators. Stockholm, 1966.
- [3] В.А.Успенский, А.Л.Семенов. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., Наука, 1985, 408 с.
- [4] Л.Кейперс, Г.Нидеррейтер. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985, 408 с.
- [5] H.Niederreiter. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, Ph. Penn. 1992, 244 p.
- [6] Franklin J.N. Deterministic simulation of random processes. Math. Comp. 1963,17, 28–59.
- [7] Hsu L.C. A general approximation method of evaluating multiple integrals. Tohohi math. J. (1957), 9, е1, 45–55.
- [8] Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., Наука, 1969.
- [9] Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Изд 2-е, М., Наука, 1975, 472 с.
- [10] Lehmer P.H. Mathematical methods in large-scale computing units. Ann. Comp. Lab., Harvard university (1951), 26, 141–146.
- [11] Таусворт. Случайные числа, порождаемые линейными рекуррентными соотношениями по модулю 2. Кибернетический сборник (Новая серия), 16, 62-73, М., Мир, 1979.
- [12] De Vroye L. Non-Uniform random variate generation, Berlin, 1986, 624 p.

- [13] Д.Кнут, Э.Яо. Сложность моделирования неравномерных распределений. Кибернетический сборник (Новая серия) 19, 97-158, М., Мир, 1983.
- [14] И.И.Гихман, Ф.В.Скороход. Введение в теорию случайных процессов, Из-ние 2., М., Наука, 1977, 568 с.
- [15] Дж.Голуб, У.Ван Лоун. Матричные вычисления. М., Мир, 1999, 548 с.
- [16] Я.Г. Синай. Введение в эргодическую теорию. Фазис, Москва, 1996, 128 с.
- [17] V. Gerlovin and V. Nekrutkin Asymptotical behavior of linear congruential generators // Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 11, No.2, pp. 135-162 (2005).